平面向量的应用问题探究

王海军

（浙江省浦江中学 浙江 浦江 322200）

[摘 要] 向量有两个作用：（1）载体作用，关键是利用向量的意义、作用脱去“向量外衣”，转化为我们熟悉的数学问题；（2）工具作用：利用向量可解决一些垂直、平行、夹角与距离问题；以向量为载体求相关变量的取值范围，是向量与函数、不等式、三角函数等相结合的一类综合问题，通过向量的有关运算，将问题转化为解不等式或求函数值域，是解决这类问题的一般方法。

[关键词] 平面向量；平面几何；三角函数；解析几何；解三角形

一. 平面向量在平面几何中的应用

用平面向量解决平面几何问题时，经常要用向量加法的三角形法则、平行四边形法则，向量减法的三角形法则进行转化；或建立适当的平面直角坐标系，可以使向量的运算更简便一些. 在解决这类问题时，共线向量定理和平面向量的基本定理起主导作用.

例1. 在平行四边形ABCD中，E和F分别是边CD和BC的中点. 若 $\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{AE}+\mu\overrightarrow{AF}$，其中λ，μ∈R，则λ＋μ＝________

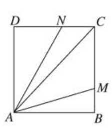
解. $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$，

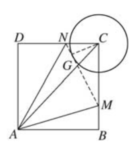
$\therefore \lambda\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\lambda\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{AD}$. $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$，$\therefore \mu\overrightarrow{AF}=\mu\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\mu\overrightarrow{AD}$，

$\therefore\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=(\frac{1}{2}\lambda+\mu)\overrightarrow{AB}+(\lambda+\frac{1}{2}\mu)\overrightarrow{AD}$，

则 $\begin{cases}\frac{1}{2}\lambda+\mu=1,\\ \lambda+\frac{1}{2}\mu=1.\end{cases}$ $\therefore \lambda+\mu=\frac{4}{3}$.

例2. 如图，在矩形ABCD中，AB＝3，AD＝4，M，N分别为线段BC，CD上的点，且满足 $\frac{1}{CM^2}+\frac{1}{CN^2}=1$，若 $\overrightarrow{AC}=x\overrightarrow{AM}+y\overrightarrow{AN}$，则x＋y的最小值为________





解. 连接MN交AC于点G. 由勾股定理，知 $MN^2=CM^2+CN^2$，

所以 $1=\frac{1}{CM^2}+\frac{1}{CN^2}=\frac{MN^2}{CM^2\cdot CN^2}$，即 $MN=CM\cdot CN$，

所以C到直线MN的距离为定值1，此时MN是以C为圆心，1为半径的圆的一条切线（如图所示），

$\overrightarrow{AC}=x\overrightarrow{AM}+y\overrightarrow{AN}=(x+y)\cdot(\frac{x}{x+y}\overrightarrow{AM}+\frac{y}{x+y}\overrightarrow{AN})$

由向量共线定理知，$\overrightarrow{AC}=(x+y)\overrightarrow{AG}$，所以 $x+y=\frac{|\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AG}|}=\frac{5}{|\overrightarrow{AG}|}$，

又因为 $|\overrightarrow{AG}|_{\max}=5-1=4$，所以x＋y的最小值为 $\frac{5}{4}$.

二. 平面向量在三角函数中的应用

解决平面向量与三角函数的交汇问题，关键是准确利用向量的坐标运算化简已知条件，将其转化为三角函数中的有关问题解决.

例3. 已知向量a＝$(\sin\theta,\sqrt{3})$，b＝$(1,\cos\theta)$，$\theta\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$

（1）若a⊥b，求θ的值；（2）求|a＋b|的最大值.

解.（1）∵a⊥b，∴a·b＝$\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta=0$. 即 $\tan\theta=-\sqrt{3}$，

又 $\theta\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$，故 $\theta=-\frac{\pi}{3}$

（2）$|a+b|^2=(\sin\theta+1)^2+(\sqrt{3}+\cos\theta)^2=5+4\sin(\theta+\frac{\pi}{3})$，

故当 $\theta=\frac{\pi}{6}$ 时，$|a+b|^2$ 的最大值为9，故|a＋b|的最大值为3.

利用向量的载体作用，可以将向量与三角函数结合起来，解题时通过定义或坐标运算进行转化，使问题的条件结论明晰化.

三. 平面向量在解析几何中的应用

向量在解析几何中的作用---载体作用. 向量在解析几何问题中的出现，多用于“包装”，解决此类问题时就是利用向量的意义、运算脱去“向量外衣”，导出曲线上的点的坐标之间的关系，从而解决有关距离、斜率、夹角、轨迹、最值等问题.

例4. 已知平面上一定点C（2，0）和直线l：x＝8，P为该平面上一动点，作PQ⊥l，垂足为Q，且 $(\overrightarrow{PC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{PQ})\cdot(\overrightarrow{PC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{PQ})=0$.（1）求动点P的轨迹方程；

（2）若EF为圆N：$x^2+(y-1)^2=1$ 的任一条直径，求 $\overrightarrow{PE}\cdot\overrightarrow{PF}$ 的最值.

解.（1）设P（x，y），则Q（8，y）.

由 $(\overrightarrow{PC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{PQ})\cdot(\overrightarrow{PC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{PQ})=0$，得 $|PC|^2-\frac{1}{4}|PQ|^2=0$，

即 $(x-2)^2+y^2-14(x-8)^2=0$，化简得 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$.

所以点P在椭圆上，其方程为 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$.

（2）因 $\overrightarrow{PE}\cdot\overrightarrow{PF}=(\overrightarrow{NE}-\overrightarrow{NP})\cdot(\overrightarrow{NF}-\overrightarrow{NP})=(-\overrightarrow{NF}-\overrightarrow{NP})\cdot(\overrightarrow{NF}-\overrightarrow{NP})=(-\overrightarrow{NP})^2-\overrightarrow{NF}^2=\overrightarrow{NP}^2-1$

P是椭圆 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$ 上的任一点，设P（x_0，y_0），

则有 $\frac{x_0^2}{16}+\frac{y_0^2}{12}=1$，即 $x_0^2=16-\frac{4y_0^2}{3}$，

又N（0，1），所以 $\overrightarrow{NP}^2=x_0^2+(y_0-1)^2=-\frac{1}{3}y_0^2-2y_0+17=-\frac{1}{3}(y_0+3)^2+20$.

因 $y_0\in[-2\sqrt{3},2\sqrt{3}]$，

所以当 $y_0=-3$ 时，$\overrightarrow{NP}^2$ 取得最大值20，故 $\overrightarrow{PE}\cdot\overrightarrow{PF}$ 的最大值为19；

当 $y_0=2\sqrt{3}$ 时，$\overrightarrow{NP}^2$ 取得最小值 $(2\sqrt{3}-1)^2=13-4\sqrt{3}$，（此时 $x_0=0$），故 $\overrightarrow{PE}\cdot\overrightarrow{PF}$ 的最小值为12

例5. 已知点P在双曲线 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ 上，点A满足 $\overrightarrow{PA}=(t-1)\overrightarrow{OP}(t\in\mathbf{R})$，且 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}=64$，$\overrightarrow{OB}=(0,1)$，则 $|\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OA}|$ 的最大值为（ ）

A. $\frac{5}{4}$ B. $\frac{24}{5}$ C. $\frac{4}{5}$ D. $\frac{5}{24}$

解. ∵$\overrightarrow{PA}=(t-1)\overrightarrow{OP}$，∴$\overrightarrow{OA}=t\overrightarrow{OP}$，∴$(x_A,y_A)=t(x_P,y_P)$.

又点（x_P，y_P）在双曲线上，∴$\frac{x_A^2}{16t^2}-\frac{y_A^2}{9t^2}=1$，∴$x_A^2=\frac{16y_A^2}{9}+16t^2$， ①

∵$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}=64$，∴$|\overrightarrow{OA}|\cdot|\overrightarrow{OP}|=|t||\overrightarrow{OP}|^2=64$，

∴$|t|(\frac{x_A^2}{t^2}+\frac{y_A^2}{t^2})=64$，将①代入上式整理得 $\frac{25y_A^2}{9|t|}+16|t|=64$，

即 $64=\frac{25y_A^2}{9|t|}+16|t|\geqslant2\sqrt{\frac{25y_A^2}{9|t|}\cdot16|t|}=\frac{40}{3}y_A$，

当且仅当 $|t|=\frac{5|y_A|}{12}$ 时取等号，∴$|y_A|\leqslant\frac{24}{5}$，

$|\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OA}|=|(0,1)\cdot(x_A,y_A)|=|y_A|\leqslant\frac{24}{5}$. ∴$|\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OA}|$ 的最大值为 $\frac{24}{5}$.

平面向量与平面解析几何交汇的题目，涉及向量数量积的基本运算，数量积的求解以及轨迹、直线和圆、直线和椭圆中最值等问题，解决此类问题应从向量的坐标运算入手，这也是解决解析几何问题的基本方法——坐标法.

总结

（1）向量兼具代数的抽象与严谨和几何的直观，向量本身是一个数形结合的产物，在利用向量解决问题时，要注意数与形的结合、代数与几何的结合、形象思维与逻辑思维的结合.

（2）要注意变换思维方式，能从不同角度看问题，要善于应用向量的有关性质解题.

参考文献

[1]李龙才，《普通高中数学课程标准》，人民教育出版社，2017。