

# 平面向量中几何意义的应用

金婉珍

(浙江省浦江中学 浙江 浦江 322200)

【摘 要】平面向量是高中数学中基础且重要的内容之一，是联系几何问题和代数问题一条重要的纽带，在解决平面向量的问题时，许多同学对于运用坐标法也就是用代数的方法来解决平面向量非常的熟练，但往往却忽略运用平面向量的几何意义将平面向量的问题通过构造平面图形来解决。笔者结合平时的教学，归纳了平面向量中三种几何意义在解题中的应用。

【关键词】平面向量；几何意义；向量加法；向量减法；构造平面图形

平面向量是高中数学中基础且重要的内容之一，然而学生却不易掌握。究其原因，一方面，平面向量是既有大小又有方向的量，是“数”与“形”的结合体；另一方面，对平面向量的考察还经常与三角函数、解三角形、解析几何等问题结合在一起，这样就加大了学生解决问题的难度。

平面向量作为一种基本工具，在平面几何问题的求解中具有极其重要的地位和作用，尤其是平面向量的几何意义，其中又有很多的独特之处，若在解题中能合理运用，必能起到化难为易、化繁为简的作用。

## 一、向量加法几何意义的运用

1. 非零向量  $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$  夹角为  $60^\circ$ ，且  $|\vec{a}-\vec{b}|=1$ ，则  $|\vec{a}+\vec{b}|$  的取值范围为\_\_\_\_\_。

解：由题意可得，如图，o点在圆C上运动，设  $\vec{OA}=\vec{a}$ ， $\vec{OB}=\vec{b}$ ，

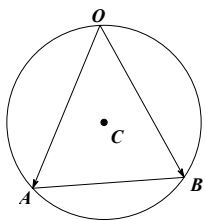
满足  $\cos \angle AOB=60^\circ$ ， $|\vec{a}-\vec{b}|=1$

当o运动到与A、B点重合时，

$$|\vec{a}+\vec{b}|_{\min}=|\vec{a}|=|\vec{b}|=1;$$

当  $\vec{OC} \perp \vec{AB}$  时， $|\vec{a}+\vec{b}|_{\max}=\sqrt{3}$ ；

即  $|\vec{a}+\vec{b}| \in (1, 3]$ 。



本题依据向量加法和减法的几何意义，找到了问题的几何模型，将平面向量问题巧妙地转化为平面几何中的基本图形——三角形，从而使问题的求解不仅直观清晰，而且简便易行。

## 二、向量减法几何意义的运用

1. (2018年浙江省高考题第9题) 已知a, b, e是平面向量，e是单位向量. 若非零向量a与e的夹角为  $\frac{\pi}{3}$ ，向量b满足  $b^2-4e \cdot b+3=0$ ，则  $|a-b|$  的最小值是

- A.  $\sqrt{3}-1$     B.  $\sqrt{3}+1$     C. 2    D.  $2-\sqrt{3}$

解：∵  $b^2-4e \cdot b+3=0$ ，e是单位向量

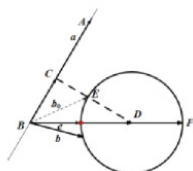
∴  $b^2-4e \cdot b+3e^2=0$  (即为  $(b-2e)^2=0$ )，如图，则有向量b在以e, 2e为直径的圆上(圆的向量形式). 以B为坐标原点，以BF所在直线为x轴，建立直角坐标系，向量b的终点在以D(2, 0)为圆心，1为半径的圆上运动。

∴ 向量a与e的夹角为  $\frac{\pi}{3}$  ∴ 向量a所在直线为  $y = \pm\sqrt{3}x$

∴ 要求  $|a-b|$  的最小值，只需求圆心到直线的距离减去圆的半径. 故

$$|a-b|_{\min} = \sqrt{3} - 1$$

求解本题的关键点有两个，一个是对向量减法的几何意义的理解，另一个是向量的数量积为零可以构造为一个圆，将代数问题通过几何图形来解决。



2. 若单位向量  $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$  的夹角为钝角， $|\vec{b}-t\vec{a}| (t \in \mathbf{R})$  最小值为  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ，

且  $(\vec{c}-\vec{a}) \cdot (\vec{c}-\vec{b})=0$ ，则  $\vec{c} \cdot (\vec{a}+\vec{b})$  的最大值为 ( )

- A.  $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$     B.  $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$     C.  $\sqrt{3}$     D. 3

解：如图，设  $\vec{OA}=\vec{a}$ ， $\vec{OB}=\vec{b}$ ， $\vec{OC}=\vec{c}$ ， $\vec{OH}=t\vec{a}$ ， $\vec{BH}=\vec{b}-t\vec{a}$ ，

则  $|\vec{b}-t\vec{a}| (t \in \mathbf{R})$  最小值即为  $|\vec{BH}|$  的最小值， $|\vec{BH}|$  的最小值即为点

B到直线OA的最短距离，

∴ 过点B作OA的垂线，

垂线段BH的距离为  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 。

∴ 在RT△OBH中， $|\vec{BH}| = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ， $|\vec{OB}|=1$ ，

∴  $\angle BOH=60^\circ$ ，∴  $\angle AOB=120^\circ$

以OA、OB为邻边构造平行四边形OADB， $\vec{OD}=\vec{a}+\vec{b}$ ， $|\vec{OD}|=1$

又 ∵  $(\vec{c}-\vec{a}) \cdot (\vec{c}-\vec{b})=0$ ， $\vec{AC}=\vec{c}-\vec{a}$ ， $\vec{BC}=\vec{c}-\vec{b}$

∴  $\vec{AC} \perp \vec{BC}$ ，即点C在以AB为直径的圆上运动。

设AB的中点为E，则  $|\vec{EC}| = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，∴  $\vec{c} \cdot (\vec{a}+\vec{b})$  的最大值在点C运动到OD的延长线与圆的交点处取得，此时  $|\vec{OC}|$  的模为  $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ ，

即  $\vec{c} \cdot (\vec{a}+\vec{b})$  的最大值为  $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ 。

本题既运用了向量减法的几何意义，即  $|\vec{b}-t\vec{a}| (t \in \mathbf{R})$  最小值即为  $|\vec{BH}|$  的最小值， $|\vec{BH}|$  的最小值即为点B到直线OA的最短距离，又将  $(\vec{c}-\vec{a}) \cdot (\vec{c}-\vec{b})=0$  转化为  $\vec{AC} \perp \vec{BC}$  的垂直关系，从而构造一个以AB为直径的圆，这样这个问题就得到了轻松解决。这道题的解法与2018年浙江省的高考题有异曲同工之妙。

## 三、平面向量数量积几何意义的应用

6. (2017年浙江省高考题第21题) 如图，已知抛物线  $x^2=y$ ，

点  $A(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ ， $B(\frac{3}{2}, \frac{9}{4})$ ，抛物线上的点  $P(x, y) (-\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2})$ 。

过点B作直线AP的垂线，垂足为Q。

(I) 求直线AP斜率的取值范围；

(II) 求  $|PA| \cdot |PQ|$  的最大值。

解：(I) 解答略。

(II) ∵ 向量  $\vec{PB}$  在向量  $\vec{PA}$  方向上的投影为  $|\vec{PB}| \cos \angle APB$ ，即为  $|\vec{PB}| \cos(\pi - \angle BPQ) = -|\vec{PQ}|$

$$\therefore |PA| \cdot |PQ| = -|\vec{PA}| |\vec{PB}| \cos \angle APB = -\vec{PA} \cdot \vec{PB} = \vec{AP} \cdot \vec{PB}$$

$$= (x + \frac{1}{2}, y - \frac{1}{4}) \cdot (\frac{3}{2} - x, \frac{9}{4} - y) = (x + \frac{1}{2}) \cdot (\frac{3}{2} - x) + (y - \frac{1}{4}) \cdot (\frac{9}{4} - y)$$

$$= -x^2 + x + \frac{3}{4} - y^2 + \frac{9}{2}y - \frac{9}{16}$$

又 ∵  $y = x^2$

$$\therefore |PA| \cdot |PQ| = -x^4 + \frac{3}{2}x^2 + x + \frac{3}{16}$$

$$\text{设 } g(x) = -x^4 + \frac{3}{2}x^2 + x + \frac{3}{16}, (-\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2})$$

∴ 当  $-\frac{1}{2} < x < 1$  时， $g'(x) > 0$ ；当  $1 < x < \frac{3}{2}$  时， $g'(x) < 0$ 。

(下转第760页)

# 与家长的交流艺术

丁伟兰

(潍坊市潍城区北关街办中心小学 山东 潍坊 261021)

**[摘要]** 作为一个班主任与家长进行沟通交流是必不可少的。但是如何与家长交流，并能够圆满的达到预期的效果，确实一件难办的事情，特别是在这独生子女当道的今天，更是难上加难。这就需要我们静下心来，寻找解决这个问题的方法。在多年的班主任工作中，我渐渐发现无论什么时候，在与家长交流时只要做到以下几点，就可以很顺利的进行沟通。

**[关键词]** 交流艺术

1、要做到以礼相待。无论是家访还是家长到学校了解情况，我们都要做到以礼相待，在与家长交流过程中，我们彬彬有礼，语言文明，让家长感觉到我们的诚意以及对他们的尊重，这样交流起来就会顺利很多。即使是后进生家长，我们也不能咄咄逼人，毕竟每个家长都希望自己有一个优秀的孩子，孩子不够优秀他们已经很难过，只有让他们感觉到我们是真正的在和他交流孩子的事情，共同寻找孩子的弱点，为他出谋划策的帮助孩子，而不是一味地职责他，一味地批评孩子，这样家长才能更好地配合我们的工作。

2、要动之以情，晓之以理。有时候在与家长的交流过程中，总会出现一些问题，特别是遇到那些不通情理的家长时，更是难以沟通，每当这个时候，我们往往会暴怒，甚至会发生语言冲突。要知道越是这种时候越要冷静，只有我们冷静下来跟他们讲道理，才会收到意想不到的效果。记得在我接任现在这个班级时，当时是一年级，有一天接到一个家长的电话，他气势汹汹的对我说：“丁老师，我告诉你我把孩子送到学校是学习的，不是挨打的！”我当时就蒙了，我什么时候打过他的孩子？我没有说话，静静地等他说完，弄明白了事情的经过，是他的孩子与别的孩子产生了矛盾，家长心疼了，找到我这里来了。并要求我马上答复他对那个孩子的处理办法。我沉默了一会儿，平复了自己的心情后告诉他：“你先静下心来听我说好不好，我觉得我不能立刻答复你，因为我只听到了你的一面之词，而你也只是听了你孩子的一面之词，这件事我需要调查清楚事情的真相，才能进行处理。”他还是认为他的孩子没有错，而且态度及其强硬，这是我觉得很无语，我也不客气的对她说道：“即使是杀人犯，还要进行大量的调查取证，才能对嫌疑人进行定罪，何况是孩子之间的一点矛盾，作为老师我不能偏听偏信，必须调查清楚再做处

理。”最后家长同意了我的做法。当然，我也是积极调查处理，给了他一个满意的答复。之后我们的沟通顺利了很多。

3、善于倾听。我觉得作为班主任，在于家长的交流过程中，不能给人以压迫感，要以谦虚的态度与家长交流，并且要善于倾听家长的倾诉，哪怕是一个满腹牢骚有怨气冲天的家长，甚至是一很难对付的家长，在你有耐心和同情的倾听下，也会被“软化”。

4、用真心对待每一位家长。每当孩子出现问题时，家长首先想到的就是寻求老师的帮助，我们及时的深处援手，帮助一下会让家长对你更加信服，也更愿意配合你的工作。本学期我的一个学生出现厌学的情况，每天都说身体不舒服不到校，一周后我感觉到事情的不对劲，就给家长打电话说出我的想法，让家长先和孩子交流找出原因，但是孩子跟家长什么都不说，我抽时间跟孩子交流，孩子总是给我一个微笑说“我没什么事，老师放心”。这时候我建议家长带孩子去看一下心理医生，孩子也同意去，结果诊断为轻度抑郁症。这之后我积极给孩子找心理老师对她进行心理辅导，找出症结，积极与家长配合，给他们出谋划策，齐心协力，周末也带领其他同学到他家去跟他聊天，陪她玩耍，帮她走出心理阴影。经过半个多学期的努力，孩子终于回归正常，跟其他孩子一样坐在教室里认真学习的时候，家长和我都露出了安心的笑。

## 结语

班主任工作是平凡而繁琐的工作，让我们在实践中不断的去探索行之有效的的工作方法，是班级管理工作再上新台阶。

## 参考文献

[1] 小学初任班主任与家长沟通的问题及对策研究[J]. 陈雪. 华夏教师. 2017 (02)

(上接第716页)

∴当 $x=1$ 时， $|PA| \cdot |PQ|$ 有最大值 $\frac{27}{16}$

本题如果运用解析几何中的常规方法先求线段PA、PQ的长再求它们的乘积的最大值，那么它的运算是非常繁琐的，学生也很难求对，但是运用了平面向量的几何意义，将求线段的乘积转化为数量积的坐标运算，大大的简化了它的运算，轻松解决这个解析几何的问题。

几何与代数是高中数学课程的主线之一。向量既是代数研究对象，也是几何研究对象，是沟通几何与代数的桥梁。我们在学

习过程中要用好平面向量的几何意义，突出几何直观与代数运算之间的融合，即通过形与数的结合，感悟数学知识之间的关联，加强对数学整体性的理解。

## 参考文献

[1] 王朝银.《创新设计高考总复习》，陕西人民出版社，2014.  
[2] 王宏良.《高中数学教与学》2011年第11期第44、45、46页。