

试论数学解题中的构造法

方风琴

(新疆阿克苏地区库车县实验中学 新疆 阿克苏 842000)

[摘要] 数学方法是对数学知识在更高层次上的抽象和概括. 构造法就是其中之一, 而且构造法在高等数学中也有着广泛的应用. 构造法的目的就是为了化繁为简、化未知为已知、化不熟悉为熟悉. 通过巧妙地使用构造法解答数学问题, 能够激发学生的发散思维, 对培养学生的多元化思维和创新精神大有裨益.

[关键词] 构造法; 解题; 应用

1 常用构造法的应用

1.1 构造法之一: 构造辅助函数

在求解(证)某些数学问题时, 我们可以根据题目中条件和结论的关系, 恰当的构造一个辅助函数, 把结论转化为研究函数的性质, 从而达到解题的目的.

以构造法在微分中值定理中的应用为例^[1]:

(拉格朗日(Lagrange)中值定理): 若函数 $f(x)$ 满足如下条件:

(i) $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续; (ii) $f(x)$ 在开区间 (a, b) 上可导;

则在 (a, b) 内至少存在一点 ξ , 使得 $f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

显然, 特别当 $f(a) = f(b)$ 时, Th1是Th2中值定理中的一个特殊情形.

例1 证明柯西(Cauchy)中值定理.

设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 满足在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 上都可导,

并且 $g'(x) \neq 0$, 则存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$ 证明 由题

目已知 $g'(x) \neq 0 (x \in (a, b) \Rightarrow g(b) \neq g(a))$

令 $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \lambda \Rightarrow f(b) - f(a) = \lambda g(b) - \lambda g(a) \Rightarrow f(a) - \lambda g(a) = f(b) - \lambda g(b)$

于是构造辅助函数 $\varphi(x) = f(x) - \lambda g(x) (x \in [a, b])$, 则 $\varphi(a) = \varphi(b)$.

最后由 Rolle 定理: 存在 $\xi \in (a, b)$, 使 $\varphi'(\xi) = 0$ 得

$\varphi'(\xi) = f'(\xi) - \lambda g'(\xi) = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ 得到 $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$.

1.2 构造法之二: 构造辅助方程

作为中学数学重要内容之一的方程, 它与等式、函数等许多知识存在着密切的联系. 有时可根据题目条件中的数量关系和结构特征, 造出新的方程, 将原问题转化为方程的求解式来讨论(常用判别式与韦达定理), 从而使问题得到解决.

例3 如果三角形 ABC 的三边长分别为 a, b, c , 满足:

$$\frac{a^4 + b^4}{c^4} + \frac{1}{2} = \frac{a^2 + b^2}{c^2}, \text{ 试判断三角形 } ABC \text{ 的形状.}$$

例4 求证定义在区间 $(-a, a) (a \in \mathbb{R}^+)$ 内的任意函数 $G(x)$ 均可以表示为一个偶函数和一个奇函数之和.

1.3 构造法之三: 构造反例

为了否定一个命题, 构造反例是最常用的方法. 1860年, 数学家威尔斯托拉斯却极为精巧的构造出一个被称为“数学中的艺术品”的反例 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x)$, 其中 b 为奇函数, $0 < a < 1$,

且 $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$. 此函数在实数轴上处处连续处处不可微.

例5 数学家范德瓦尔登1930年构造的“连续函数除极个别点外总是处处可微的”之反例.

将此函数“无限次”翻造, 然后再叠加起来, 生成的函数一定每一点都是连续但不可微的. 这样, 他用样的思想方法, 把威尔斯特拉斯的振动曲线 $y = \cos \pi x$ 改进为折线, 成功的构造出著名的范德瓦尔登反例.

设: $\varphi(x) = |x|, -1 \leq x \leq 1$, 规定 $\varphi(x+2) = \varphi(x)$, 把 φ 的定义域扩张到所有的实数, 扩张后的函数 $\varphi(x)$ 可以看成是 x 与最接近的偶数之差的绝对值. 令 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n \varphi(4^n x)$ 容易证明 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 但处处不可微.

1.4 构造法之四: 构造公式

首先介绍了两个重要极限公式, 由等价无穷小的学习可知

$\sin(x) \sim x, x \rightarrow 0$ 时, 也有公式 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1, \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ 或

$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$, 这几个公式在极限中都可以看成公式, 通过对求极限函数变形, 添加项来构造公式.

例6 求极限 ① $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha x}{\sin \beta x}$ ② $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{1}{x-2}\right)^{\frac{1}{x-3}}$

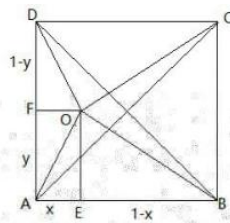
分析①: 由于所求极限涉及到正弦函数, 所以我们要往这两个公式上联想, 但所求函数与公式之间有很大的差距, 在此就可巧用构造法.

1.5 构造法之五: 构造几何图形

某些题目条件中的数量关系若有明显的或隐含的几何意义或背景, 或者能以某种方式与几何图形建立联系, 此时则可以考虑通过构造几何图形将题设中的数量关系直接反映到几何图形之中, 使数与形有机结合起来, 借助图形的性质, 最终解决问题.

例7 设 $x, y \in (0, 1)$ 求证 $\sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + (1-y)^2} + \sqrt{(1-x)^2 + y^2} + \sqrt{(1-x)^2 + (1-y)^2} \geq 2\sqrt{2}$

分析与解 仔细观察发现, 题中结论的根号下面都是数字平方和的形式, 易于联想到勾股定理而构造直角三角形. 由于共有四个根式, 结论中有 $\sqrt{2}$, 故构造边长为1的正方形图形, 所要证明的问题就是转化为图2的直观图形.



2 结束语

本文主要写了构造法在数学解题中的运用, 构造法除了要注意基础知识和基本思想之外还让我们打破常规的思想, 让我们在解题的时候变得更加灵活, 有助于培养学生的发散思维和创新能力, 为我们解题带来了很大的便利.

参考文献

- [1] 北京大学数学系. 数学分析(第四版)[M]. 北京: 高等教育出版社, 2010. 7.
- [2] 黄翔. 数学方法论选论[M]. 重庆: 重庆大学出版社, 1995. 4.