求解函数单调性的几种策略

张金玲
（白云鄂博矿区教育局　内蒙古　包头　014080）

[摘　要] 在我们数学学习中，函数占大部分，判断函数单调性是函数的重要性质之一，从代数意义上看，函数的单调性反映了函数随着自变量的增大而变化（增大或减小）的情况：从几何意义上看，函数的单调性反映了函数图象在定义域的各个子集内的变化情况（上升或下降），因此函数的单调性是研究函数运动变化趋势的重要内容和方法。判定函数单调性又分为定义域区间具有单调性和不具有单调性两种。通常定义域具有单调性的情况下判断函数的单调性方法主要有三种：图像法、函数单调性定义法和导数法。

[关键词] 判断函数单调性的方法；图像法 导数法；单调性定义；零点法

一、对函数单调性的定义

一般地，设函数 $y=f(x)$ 的定义域为A，区间I属于A。如果对于区间I内的任意两个值 x_1,x_2，当 $x_1<x_2$ 时，总有 $f(x_1)<f(x_2)$（或 $f(x_1)>f(x_2)$），那么就说 $y=f(x)$ 在区间I上是单调增（或减）函数，I为 $y=f(x)$ 的单调增（或减）区间。从函数的单调性可知：

1、函数单调性是函数在某个区间（定义域的某个子集）上的局部性质，而不是函数在整个定义域上的整体性质，就是说函数的单调性是相对于某一具体区间而言的，它是函数在该区间上的整体性质.因此，不能理解为任意区间，也不能理解为定义域区间.[1]

2、对于定义表述中的 x_1,x_2，隐含了两方面的涵义：

第一，x_1,x_2 必须是同一个单调区间上的两个自变量；

第二，x_1,x_2 在同一个单调区间上必须具有任意性，否则定义将不具备充分性。

3、对于函数单调性的表述隐含了当x 1- x 2 与f（x 1）-f（x 2）同号时，f（x）在给定区间上是增函数；当 x_1-x_2 与 $f(x_1)-f(x_2)$ 异号时，$f(x)$ 在给定区间上是减函数。

4、对于一个函数单调区间来说，它可以有一个，也可以有多个。

二、关于单调函数的性质

1、从函数图像变化趋势上看，单调递增函数图像从左向右是逐渐上升，单调递减函数图像从左向右是逐渐下降；反之也成立。

2、奇函数在原点两侧对称区间上单调性相同；偶函数在原点两侧对称区间上单调性相反。

3、由 $x_1>x_2$ 时，$f(x_1)>f(x_2)$（或 $f(x_1)<f(x_2)$），可知若f（x）属于给定区间上的x 所取得的函数值区间，当 $f(x_1)>f(x_2)$ 时，都有 $x_1>x_2$（或 $x_1<x_2$），从而可推得：原函数与反函数在给定区间和给定区间上的函数值区间具有相同的单调性。[2]

三、函数单调性的判断

（一）定义域在单调区间上函数单调性的证明

1、利用函数的图象求解

2、利用定义判断函数的单调性

（1）利用定义采用作商法比较判定

（2）利用单调函数的性质判定

（3）利用导数判断函数的单调性

我们在解决单调性问题中，常常遇到一类含有参数的函数（简称含参函数）在某区间单调问题[3]：

探究问题

在逆向解决单调性时，至少应考虑题设成立的必要条件.教材[5]中对函数的单调性是这样描述的：“一般地，设函数y = f（x）在某个区间内可导，如果f′（x）> 0，则f（x）为增函数；如果f′（x）< 0，则f（x）为减函数.”它给出的只是单调性的充分条件.在教材[1]中还有：“如果函数在某个区间内恒有f′（x）= 0，则f（x）为常数”，又由于“常数的导数为0”，因而它给出了函数在某个区间为常数函数的充要条件.这说明f′（x）= 0 在某区间上有连续解时，f（x）不具有单调性，而f′（x）= 0 只是离散解时，不影响f（x）的单调性.于是我们可得出如下结论：设f（x）在定义域内的某个区间上可导，（1）如果f′（x）= 0 有离散解，若f（x）在这个区间上是增函数，则f′（x）≥0；若f（x）在这个区间上是减函数，则f′（x）≤0.

（2）如果f′（x）= 0 有连续解，则f（x）不具有单调性.注：利用导函数的几何意义，不难对上述命题证明.（一般高考中有关导数的内容都只涉及多项式函数（一般是二次或三次函数），不会存在在导函数取零的点连续的情况.）

（二）定义域在非单调区间上函数单调性的证明

当给定函数的定义域（或指定区间）不是单调区间时，如何确定单调区间的端点，进而确定其单调性却没有现成的路可走，这里试给出一种确定单调性的方法，估且称其为“ 零点法”，具体步骤是：

在函数f（x）的定义域内（或指定区间上）任取 $x_1<x_2$，作差 $f(x_1)-f(x_2)$，并作因式分解等变形，记其中关于 x_1,x_2 且不能确定符号的因式为 $g(x_1,x_2)$。令 $g(x_1,x_2)=0$，且 $x_1=x_2=x_0$，得 $h(x_0)=0$，从中解出 x_0，x_0 即是函数 $f(x)$ 的单调区间的端点，然后就可以利用单调性的定义方便地确定函数的单调区间。

最后需要说明的是，“零点法“确定单调区间的端点及单调区间，是一种探索性的过程，运用时一定要注意严密性。[4]

函数单调性是函数的重要性质.从知识结构上看，函数的单调性既是函数概念延续和拓展，又是后续研究指数函数、对数函数、三角函数单调性等内容的基础，在研究各种具体函数的性质，解决各种问题中都有着广泛的应用.在函数单调性概念的建立过程中蕴涵诸多数学思想方法，这对于进一步探索、研究函数的其他性质有很强的启发与示范作用.

参考文献

[1]数学分析（第二版）陈传璋，金福临，朱学炎，欧阳光中编.

[2]全日制普通高级中学教科书数学第一册　人民教育出版社中学数学室编

[3]中学第二教材　薛金星编

[4]中学数学参考1999年第7期

[5]人民教育出版社中学数学室.全日制普通高级中学教科书数学第三册（选修Ⅱ）.北京：人民教育出版社，2第3 版