

# 运用图形旋转模型培养学生数学能力

李 健

(广东省清远市清城区清城中学 广东 清远 511500)

**【摘要】** 数学建模是数学的核心素养之一。在数学教学中, 根据内容通过建模运用数学模型, 既可以培养学生数学能力, 又提高课堂教学效率。在初中数学图形旋转复习中, 用建模思想, 构建图形旋转模型, 通过四个层次的运用, 能很好地培养学生的数学应用能力, 数学关联能力, 逻辑推理能力和创新能力。

**【关键词】** 运用; 旋转模型; 培养; 数学能力

数学建模是数学六大核心素养之一。数学模型是数学方法、数学思维、数学思想、数学能力等的具体表现。在数学教学中, 利用好数学模型能很好地培养学生的数学能力, 提高课堂教学效率。

## 一、建立图形旋转模型

数学模型是通过对数学现象的分析、抽象、概括, 用数学语言将其共同属性固化成型, 形成一种具有普遍性和应用性的解决数学问题的数学方法、数学思维、数学思想、数学能力。

(一) 图形旋转的分析。图形旋转可以从三个方面去探讨。

(1) 图形绕什么旋转。一是绕点旋转, 即中心旋转。此类旋转得到平面图形。二是绕直线旋转, 即轴旋转, 此类旋转后得到立体图形。

(2) 什么图形旋转。初中阶段只学习点、线、多边形的旋转。

(3) 如何旋转。它包括沿什么方向(顺时针、逆时针)旋转, 旋转多少(即旋转角度)

通过学生对相关基本知识全面认识, 使学生对旋转内涵进行准确理解。

(二) 中心旋转的特征。因为线是由点确定的, 多边形也是由顶点决定其形状和大小, 所以, 无论是点、线、多边形, 甚至其他图形都可以用点的旋转来完成。

例1 已知平面上的两点A、B绕第三点O顺时针旋转 $30^\circ$ , 得到点A', B'。

分析: 点A绕点O旋转, 实际上就是以点O为圆心, OA为半径旋转, 顺时针方向旋转 $30^\circ$ , 也就是OA与OA'的夹角为 $30^\circ$ , 可以得出:  $OA=OA'$ ,  $OB=OB'$ ,  $\angle AOA'=\angle BOB'=30^\circ$ 。

例2 已知直线l, 点O是直线外一点, 将直线绕点O顺时针旋转 $45^\circ$ , 得直线m。

分析:  $\because$  两点确定一条直线,  $\therefore$  只要在直线l上任取两点A, B, 将A, B分别绕点O旋转 $45^\circ$ , 分别得到点A', B', 过A', B'作直线, 即为直线m

例3 已知四边形ABCD, 将四边形ABCD绕点A顺时针旋转 $90^\circ$ 得四边形AB'C'D'。

分析:  $\because$  四边形的四个顶点确定了四边形的形状和大小, 要让四边形ABCD绕点A顺时针旋转 $90^\circ$ , 只需将剩下三个顶点B, C, D绕点A分别顺时针旋转 $90^\circ$ 即可。同样得出:  $AB=AB'$ ,  $AC=AC'$ ,  $AD=AD'$ ,  $\angle BAB'=\angle CAC'=\angle DAD'=90^\circ$ 。

从以上分析可以总结出中心旋转的共同特性: 点在旋转前后, 它们到旋转中心的距离是不变的(即相等), 点旋转前后与旋转中心的连线所得两线段的夹角等于旋转角。图形旋转前后是全等的。

## 二、旋转数学模型的应用

在初中数学旋转问题上, 数学模型应用分四个层次: 直接应用, 分析应用, 灵活应用, 构造应用。通过四个运用, 培养学生的数学能力。

(一) 直接运用模型, 培养学生应用能力。

例4  $\triangle AB'C'$  是 $\triangle ABC$ 绕点A顺时针旋转 $20^\circ$ 而得, 已知 $AB=10$ , 求 $\angle CAC'$ 的度数,  $AB'$ 的长。

分析:  $\because$  点C绕点A顺时针旋转 $20^\circ$ 得到点C', 实际上就是以点A为圆心, AC为半径, 半径AC顺时针旋转 $20^\circ$ 得半径AC',  $\therefore \angle CAC'=20^\circ$ , 在旋转过程中 $AB=AB'$ ,  $\therefore AB'=10$ 。

通过这种直接应用, 让学生懂得旋转模型的特征, 培养学生应用模型的能力。

(二) 分析运用模型, 培养学生关联能力。

例5 在 $\triangle ABC$ 中,  $\angle CAB=75^\circ$ , 在同一平面内将 $\triangle ABC$ 绕点A旋转到 $\triangle AB'C'$ 的位置, 使得 $CC' \parallel AB$ , 求 $\angle BAB'$ 的度数。

分析: 从旋转模型开始思考, 能否找到有效线段和旋转角? 可以找到:  $AC=AC'$ ,  $AB=AB'$ ,  $\angle BAB'=\angle CAC'$ , 旋转模型的结论找到后, 再将它与题中其它已知条件关联。已知 $\angle CAB=75^\circ$ ,  $CC' \parallel AB$ , 可得 $\angle C'CA=75^\circ$ , 而 $AC=AC'$ ,  $\therefore \angle CC'A=\angle C'CA=75^\circ$ 。 $\therefore \angle CAC'=180^\circ-2 \times 75^\circ=30^\circ$ 。进一步利用模型:  $\because AC$ 旋转得 $AC'$ ,  $\therefore \angle CAC'$ 就是旋转角, 同理 $\angle BAB'$ 也是旋转角,  $\therefore \angle BAB'=\angle CAC'=30^\circ$ 。

通过对旋转模型与已知条件的关联分析, 可将旋转知识与其它知识结合起来开阔数学思路, 培养学生的关联能力。

(三) 灵活运用模型, 培养学生逻辑推理能力。

例6 如图 $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形, BC为斜边, P为 $\triangle ABC$ 内的一点, 将 $\triangle ABP$ 绕点A逆时针旋转后, 能与 $\triangle ACP'$ 重合, 已知 $AP=3$ , 求 $PP'$ 的长。

分析: 咋一看, 因为点P是 $\triangle ABC$ 内任意一点, 存在不确定性, 所以给学生的感觉是有难度, 学生可能有畏难情绪, 这时教师要引导学生思考, 寻找突破口, 因为此题与旋转有关, 可引导学生先运用旋转模型去分析推导:  $\triangle ACP'$ 是 $\triangle ABP$ 绕点A逆时针旋转而得,  $\therefore \angle BAC$ ,  $\angle PAP'$ 是旋转角,  $\because \triangle ABC$ 是等腰直角三角形,  $\therefore \angle PAP'=\angle BAC=90^\circ$ , 此时形势明朗:  $\triangle PAP'$ 为直角三角形,  $\because AP=AP'=3$ ,  $\therefore PP'=\sqrt{AP^2+AP'^2}=3\sqrt{2}$

通过灵活运用旋转模型, 对一些表面无头绪的数学问题, 能很快找到思维的突破口, 然后利用分析推理, 解决数学问题, 无形中培养了学生的逻辑推理能力。

(四) 构造运用模型, 培养学生创造新能力。

例7 在 $Rt\triangle ABC$ 中, 点D, E, F分别在AB, AC, BC上, 且四边形DECF为正方形, 已知 $AD=5$ ,  $BD=6$ , 求图中阴影部分的面积。

分析: 此题表面看题目简单, 思路清晰: 用三角形面积减正方形面积即可。可是一看已知条件,  $AD=5$ ,  $BD=6$ , 很难求, 基础好一点的同学可能利用相似三角形或三角函数求解, 但过程很繁。引导: 求阴影部分面积出了加减法, 还有割补法, 也就是利用“数学转换思想”, 割一块, 补一块, 看 $Rt\triangle AED$ ,  $\because DE=DF$ , 即 $\angle DFC=90^\circ$ ,  $\therefore$ 只要在FC上截取 $FA'=AE$ 即可, 关键是FC是否大于AE,  $\because BD>AD$ ,  $\therefore DF>AE$ , 即 $CF>AE$ , 到此时形势渐渐明朗:  $\because \triangle DAE \cong \triangle DA'F$ ,  $\therefore A'D=AD=5$ , 又 $\because \angle ADE+\angle BDF=90^\circ$ ,  $\therefore \angle A'DB=90^\circ$ , 从而得到阴影部分面积是 $5 \times 6 \div 2=15$ 。此时进一步引导学生: 上面割补的过程实际上也可以通过旋转完成,  $\because$  四边形DECF是正方形,  $\angle AED$ 为直角,  $\therefore$  将 $Rt\triangle DEA$ 绕D点逆时针旋转 $90^\circ$ 即可, 方法更简捷巧妙。

## 结语

要构造旋转图形, 需要扎实的基础和创新的思维方式, 通过构造应用模型, 既能培养学生的创新思维能力, 更能培养学生的数学创新能力。

## 参考文献

- [1] 罗建平. 基于图形旋转系统的实体建模研究[D]. 中南大学, 2011.
- [2] 张晔芝. 基于图形旋转系统的渐进层次细节方法研究[D]. 中南大学, 2007.