

分析初中数学动点问题的解题对策

杨丹丹

(内蒙古呼伦贝尔牙克石市库都尔中学 内蒙古 牙克石 022164)

[摘要]动点问题一直是初中数学教学的难题,它蕴含了丰富的数形结合思想和分类转化等级方法,在中考中也常常作为压轴题出现。学生要想在此类题型中取得高分,必须要具有良好的思维能力和一定的解题技巧。

[关键词]初中数学;懂点问题;解题对策

[DOI] 10.12252/j.issn.2096-6261.2019.11.674

引言

动点问题指的是图形中存在一个或是多个动点,并且这些点能够在直线、射线以及弧线上进行运动的开放式题目。要想解决该类问题,需要灵活的运用相关的数学知识,采取动中取静的思路来进行分析。该类问题一般情况下会作为一个大型和若干个小题出现,问题由浅入深、层层递进,能够有效帮助学生利用动态思维来分析问题和解决问题。在解决懂点问题时,需要需要把握好动中有静的解题思想,确定问题的不变关系,动静互化,掌握运动的特殊位置,从而明确解题思路,提高解题效率。

一、将动点问题特殊化

近年来的中考中,动点问题更多的表现于通过运动过程中的某个状态来确定变量以及不变量,并且建立方程模型,这就是动中求静。而后通过静止状态来解决运动状态的问题,使复杂的问题简单化。通常情况下会选择动点运动到一个特殊点的状态或是运动到一个特殊位置形成一个特殊图形的特殊状态。这种题型经常出现在中考中,并且以函数的形式表现,通过矩形、三角形、梯形等图形的运动状态表现出来。由于该类型题涉及内容较多,需要将函数知识与几何知识进行结合,所以很多学生感到困难。因此,在处理该类型题时,需要在解析几何与函数的基础上,分析动点与动静之间的关系,将复杂的内容简单化。

二、“动”中取“静”,明确问题中的变量和不变量关系

“动”中取“静”指的是在图形运动变化的过程中,确定问题的不变量或是不变关系。动点问题中会存在许多不变量,比如直径所对的圆周角为 90° ,特定反比例函数中的比例系数为 k 。因此在解答动点问题时,可以先找出条件中存在的不变量与变量,确定图形运动时变量与不变量之间的关系,探寻有效的解题途径。如下图所示, P 为圆 O 直径 AB 延长线上的一点,过 P 点做圆 O 的切线,切点为 C ,将 AC 连接,如果点 P 在延长线上运动,过 P 点做 $\angle APC$ 的平分线并且交 AC 于 M 点,那么 $\angle PMC$ 的大小是否会发生变化,如果发生变化,请说明原因,如果不会,请求出 $\angle PMC$ 的大小。

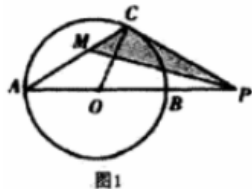
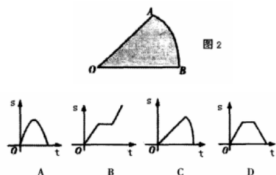


图1

在该题中,不管点 P 在在延长线上如何运动, PC 都是圆 O 的切线,因此可以连接 OC ,那么 $\angle PCO=90^\circ$ 。根据圆周角以及外角定理可知, $\angle PMC=\angle PAC+\angle MPO=\frac{1}{2}\angle POC+\frac{1}{2}\angle OPC$ 。点 P 在移动时, $\angle PAC$ 、 $\angle MPO$ 的大小也会发生变化,但是二者之和却不会发生变化, $\angle POC+\angle OPC=90^\circ$,由此可得, $\angle PMC$ 的大小不会发生任何变化,而且 $\angle PMC=\frac{1}{2}\angle POC+\frac{1}{2}\angle OPC=45^\circ$ 。

三、以动制动,建立图形中变量之间的函数关系

以动制动是根据函数图像来变数动点变化的轨迹,通过研究运动函数,建立变量之间的函数关系,从而解决动点问题。如图2所示,一只蚂蚁从 O 点出发,沿着扇形 OAB 的边缘爬行一圈,假设其爬行速度为 t ,到 O 点的距离为 S ,那么下图哪个是 S 关于 t 的函数图像?



由图可知,蚂蚁从 O 运动到 A 的过程中,蚂蚁到 O 点的距离 S 会随着运行时间 t 的增加而增加,从 A 运动到 B 的过程中,蚂蚁到 O 点的距离基本保持不变,蚂蚁从 B 运动到 A 的过程中,蚂蚁到 O 点的距离 S 会随着时间 t 的增加而增加,因此,本题选择 D 。

四、动静互化,明确运动过程中的特殊位置

如果动点问题的目的是求值或是特殊几何时,动点通常是在特殊位置形成的图形或是关系中,动静互化最重要的就是抓住图形运动时的静,将问题特殊化,找出动与静之间存在的联系。在该类问题中,可以采用逆向思维,将结论逆推,从而找出使结论成立的条件,理清解题思路,优化解题过程。如下图所示,图形 $ABCD$ 为边长 2cm 的正方形,点 P 是对角线 AC 上的一个动点,点 Q 是 BC 边的中点,连接 PQ 、 PB ,求 $\triangle PBQ$ 周长最小值。

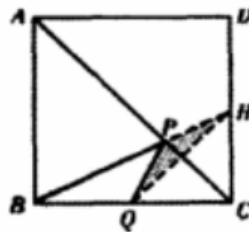


图3

由题可得,在 $\triangle PBQ$ 周长中, BQ 值不会变化,但是 PB 和 PQ 却随时都处于变化中。并且由于 B 、 Q 都处于 AC 的一侧,所以可以过 Q 点作 AC 的对称点 H ,又因为正方形具有对称性,那么点 H 将会落在 CD 的中心上,所以连接 BH 、 AC 、 BH 的交点就是 $\triangle PBQ$ 的周长。因为 $PQ=PH$,所以 $PQ+PB=PH+PB=BH=\sqrt{5}$, $\triangle PBQ$ 的周长= $BQ+PB+PQ=1+\sqrt{5}$ 。

五、动点问题在函数题型中的解题思路

函数题型也是常见的动点问题,在解题时需要用到一些平面几何方面的知识,比如下列例题:已知一条直线,方程式为 $y=3x+3$,与 x 轴的焦点为 A ,与 y 轴的交点为 B ,将 $\triangle AOB$ 沿着 y 轴进行翻折,让点 A 映射出点 C ,同时有一条抛物线经过了点 B 、 C 以及 $D(3,0)$,求直线 BD 与抛物线的方程式^[1]。

该题的动点太多,所以存在很多的未知条件,所以必须采用特定的系数法来进行解答。根据直线方程式 $y=3x+3$ 与 x 轴的交点, A 点为 $(-1,0)$, B 点为 $(0,3)$,同时可以得出映射点 $C(1,0)$,假如直线 BD 的解析式为 $y=kx+b$,那么将 B 点以及 D 点代入式中, $3k+b=0$,已知 $b=3$,得出 $k=-1$,质变 BD 的解析式为 $y=-x+3$,抛物线解析式为 $y=a(x-1)(x-3)$,而且抛物线在点 $B(0,3)$ 上,将其代入可知 $3=ax(-3)\times(-1)$, $a=1$,最后得出抛物线的解析式为 $y=(x-1)(x-3)=x^2-4x+3$ 。

结束语

初中动点问题题型多样,涉及的知识面广泛,包含了图形的平移、翻转、剪切以及拼接等,对于初中阶段的学生而言,具有很大的难度。要想解决该类题目,需要固定变量个定量,以方程模型来完成动点求解。并且在平时的数学学习中重视基础知识的积累和训练,不断提高学生的数学思维和数学品质,从而使学生在面对该类问题时能够游刃有余。

参考文献

- [1] 渠秋艳. 初中数学动点问题的解题对策探析[J]. 考试周刊, 2019, (63): 94.
- [2] 张哲. 初中数学动态几何问题的解题障碍分析及对策[D]. 江苏: 苏州大学, 2016. DOI: 10.7666/d.Y3164066.
- [3] 连兴铭. 关于初中数学动点问题的解题策略分析[J]. 考试周刊, 2020, (74): 63-64.
- [4] 吴冬明. 初中数学动点问题的求解研究[J]. 中学教学参考, 2020, (8): 20-21.