核心素养立意的函数教学方法与路径

马细惠

广州市育才中学　广东　广州　510080

[摘　要]新教材强调的“单元-课时”教学设计的指导思想，不仅可以使老师的教学具有数学的整体性，而且能使学生通过一个个具体对象的学习，逐步明了研究一个数学对象的基本框架和路径，这对发展学生的理性思维有至关重要的作用。函数是现代数学最基本的概念，是描述客观世界中变量关系和规律的最为基本的数学语言和工具，在解决实际问题中发挥着重要作用。高中阶段函数主线的基本架构是：函数的概念与性质—基本初等函数—函数的应用—离散函数（数列）—导数及其应用，必修课程的函数主题的内容包括函数的概念与性质，幂函数、指数函数、对数函数，三角函数，函数的应用。

[关键词]核心素养；函数教学；教学方法

【DOI】10.12252/j.issn.2096-6261.2020.02.1247

新教材强调的“单元-课时”教学设计的指导思想，不仅可以使老师的教学具有数学的整体性，而且能使学生通过一个个具体对象的学习，逐步明了研究一个数学对象的基本框架和路径，这对发展学生的理性思维有至关重要的作用。函数是现代数学最基本的概念，是描述客观世界中变量关系和规律的最为基本的数学语言和工具，在解决实际问题中发挥着重要作用。高中阶段函数主线的基本架构是：函数的概念与性质—基本初等函数—函数的应用—离散函数（数列）—导数及其应用，必修课程的函数主题的内容包括函数的概念与性质，幂函数、指数函数、对数函数，三角函数，函数的应用。

一、函数新教材教学实施的方法

（一）用严谨简洁的语言抽象出函数的概念和性质，有利于学生数学抽象、逻辑推理等核心素养的发展。

1、函数的概念

（1）在引入环节中，通过学生熟悉的一次函数 $y=4x$ 与现实背景中抽象出的函数 $l=4x$ 是否相同、函数 $y=x$ 与 $y=\frac{x^2}{x}$ 是否相同，引发认知冲突，激发进一步学习函数的需要。

（2）通过问题1（复兴号高铁运行）创设问题情境，引导学生用初中函数的概念进行判断，再通过“追问”引起认知冲突，促使学生认识到不关注自变量的变化范围就可能无法用函数准确刻画变量关系、运动规律的问题，在此基础上再给出用集合语言与对应关系刻画函数的示范。

初中：在一个变化过程中，如果有两个变量 x 与 y，并且对于 x 的每一个确定的值，y 都有唯一确定的值与之对应，那么我们就说 x 是自变量，y 是 x 的函数。

高中：设 A、B 是非空的实数集，如果对于集合 A 中的任意一个数 x，按照某种确定的对应关系 f，在集合 B 中都有唯一确定的数 y 和它对应，那么就称 f：$A\to B$ 为从集合 A 到集合 B 的一个函数。

初中阶段函数的定义比较形象、直观，与“变化过程”联系紧密；高中阶段的定义进一步舍弃了运动变化背景，抽象为两个实数集元素之间的对应关系，这样就不仅可以研究一类函数的性质、函数之间的关系，还可以研究不同函数类的关系，对不同函数类进行运算等，从而极大地拓展了函数的研究视野，函数的应用范围也得到了扩展。

2、函数的单调性与最值

（1）从几何直观到文字语言再到符号语言，使学生充分感受到数学符号语言的简洁，体验数学表达方式的力量。利用初中已有的经验，引导学生结合 $f(x)=x^2$ 的直观图象用文字语言表达出函数的单调性，老师再用符号语言示范，接下来可以让学生模仿，用符号语言表达函数 $f(x)=-x^2$ 和 $f(x)=|x|$ 的单调性，最后师生一起归纳共性，给出表达一般函数单调性的符号语言。

初中用来描述函数单调性的文字语言形象直观，但无法用数学工具进行更深入的研究，那么函数单调性概念的抽象程度不够，可用性也就不强。通过本节课的学习，先让学生知道“该怎么说”，然后通过模仿学会“这么说”，最后能在合适的地方“用出来”。

（2）将用概念作判断的过程步骤化，将概念性知识转化为程序性知识，有效落实技能的同时，积累基本活动经验。基础知识、基本技能的教学是课堂教学的基本任务，这也是让学生领域基本思想、积累基本活动经验的载体，所以必须给予重视。通过问题引导学生思考利用单调性、最大值、最小值的定义解决相关问题的基本步骤，在解题过程中要求学生结合具体问题的解决回顾解题步骤，从而不断地强化应用定义求解问题的程序。

（二）强调代数运算和函数图象的综合运用，进一步加强数形结合的方法，有利于学生的直观想象、数学运算等核心素养的发展。

数形结合是函数主要的研究方法。如果能画出函数图象，如初中已经学过的一次函数、二次函数和反比例函数，可以直接通过观察和分析图象的特征，得到函数的一些性质；而高中阶段应该在图象直观的基础上加强代数运算的方法，由此得到函数性质的定量刻画，尤其是，在后面选择性必修课程中我们还会利用导数进行研究，实现对函数性质的精准刻画。比如直接用函数单调性的概念进行运算可直接得到函数在某一个区间上的单调性，用奇偶性的概念可直接得到一个函数的对称性，再比如指数函数、对数函数还有幂函数的过定点的问题，都可以直接由函数的解析式求得。通过对本单元的学习，让学生形成“由性质画图象”的观念，掌握从代数角度研究函数性质的方法。

二、函数的研究路径

接下来以对数函数为例，来说明研究一类函数的基本路径：背景—概念—图象与性质—应用

创设情境，认识对数函数

问题1：我们知道，指数函数 $y=(\frac{1}{2})^{\frac{x}{5730}}(x\geq 0)$ 描述了死亡生物体内碳14的含量 y 随死亡时间 x 的推移而不断衰减的规律。结合考古工作的实际情况，你认为利用这个函数可以解决什么问题？

实际上，考古工作中真正面临的问题是用科学仪器测出死亡生物体内碳14的含量，再利用这个数据区判断该生物死亡了多长时间。

追问1：利用函数$y=(\frac{1}{2})^{\frac{x}{5730}}(x\geq 0)$解决这个问题，实际上就是要做什么？

在学生独立思考、互动交流的基础上明确要解决的问题是：给定一个y的值，利用函数关系，求出对应的x的值。例如，已知死亡生物体内碳14的含量是0.5，求对应的x的值。

追问2：从函数的观点分析上述求解过程，你能得出什么结论？

从函数的观点出发，就是判断给定一个碳14含量值y，是否有唯一确定的死亡时间x与之对应。这个问题可以通过已经学过的指数函数的图象及函数的单调性来解释。

通过一个问题两个追问，引导学生从考古研究的真实情况出发提出问题，培养学生的发现和提出问题的能力。在此基础上联系指数与对数的关系，借助指数函数解决对数的问题，推广到一般，由指数函数引出对数函数。

数学抽象，给出对数函数的概念

问题2：从$y=(\frac{1}{2})^{\frac{x}{5730}}(x\geq 0)$出发，利用对数和指数的相互关系，得出函数$x=\log_{\sqrt[5730]{\frac{1}{2}}}y,(y\in(0,1])$，对于测得的任何一个死亡生物炭14含量数据，都可以由此函数推出其死亡年份。能否将y看成自变量，x为变量，x是否为y的函数？

师生一起归纳总结，得到对数函数的概念。

一般地，函数$y=\log_a x(a>0,且a\neq 1)$叫做对数函数。

在问题1的基础上，从特殊到一般，直接抽象出对数函数的概念。通过与指数函数关系的分析，明确两者的内在关联性，为后续利用互为反函数的关系研究对数函数做好铺垫。

问题3：研究函数图象与性质的研究路径是什么？

根据前面研究幂函数和指数函数的经验，学生一般会想到“列表—描点—作图—观察图象得出性质”。教师可以再提出问题引导学生思考新的方法。

追问1：前面我们利用指数幂的运算性质证明对数的运算性质，所以我们完全有理由相信，可以通过对数函数与指数函数的联系，利用指数函数的图像与性质，得出对数函数的图像和性质。你能在回顾指数函数图象和性质的基础上，通过对数与指数的关系，得出对出函数的图象与性质吗？

师生一起回顾指数函数的图象与性质，为了更加直观的观察两者之间的关系，可以通过在同一个表格中取点，在同一个直角坐标系中描点和绘图。以$y=2^x$和$y=\log_2 x$为例：

$y=2^x$		$y=\log_2 x$	
x	y	x	y
−1	0.5	0.5	−1
0	1	1	0
1	2	2	1
2	4	4	2
3	8	8	3
4	16	16	4

上述取点，列表的过程，利用了指数与对数的如下关系：当点$P(a,b)$满足满足$y=2^x$时，有$b=2^a$，于是$a=\log_2 b$，说明点$Q(b,a)$满足$y=\log_2 x$。

追问2：观察上述取点以及所得图象，你能说一说$y=2^x$和$y=\log_2 x$的图象之间吗？为什么呢？在已知$y=2^x$的图象的基础上，不用描点法，你将如何画出$y=\log_2 x$的图象？

通过列表描点连线，学生可以观察到两个函数的图象关于直线$y=x$对称。

把取点和列表对照起来，并将$y=2^x$和$y=\log_2 x$的图象画在同一个坐标系中，有利于进一步体会这两个函数之间的关系，发现它们的图象之间的对称关系，增强学生建立指数函数与对数函数之间的联系，进而利用指数函数研究对数函数的意识。

追问3：在研究指数函数的图象和性质时，我们已经知道了底数互为倒数的两个指数函数的图象关于y轴对称。那么，对于底数互为倒数的两个对数函数，比如$y=\log_2 x$和$y=\log_{\frac{1}{2}} x$，它们的图象是否也有某种对称性？能不能直接由两个函数的解析式进行分析？

通过追问3，可以让学生再一次意识到，利用指数与对数的关系，可以改变作函数图象的作图方式，实际上这是利用了代数性质简化作图。通过不同途径作图，可以增强学生对知识联系性的认识，从而理解用指数函数的性质研究对数函数的意义，更深刻地把握它们的性质。

老师通过信息技术画出$y=\log_2 x$和$y=\log_{\frac{1}{2}} x$的图象，同时展示底数为3和$\frac{1}{3}$、4和$\frac{1}{4}$的对数函数的图象，学生可以从整体上突出对数函数的特征，清晰地呈现出对数函数的类型，从而促使学生想到分类讨论对数函数的图象和性质？

学生通过观察对比之后发现，指数函数$y=a^x(a>0且\ a\neq 1)$和对数函数$y=\log_a x(a>0且\ a\neq 1)$的定义域和值域互换；所过的定点横纵坐标互换；单调性都分$a>1$和$0<a<1$两类情况；并且在同一类情况下单调性相同，两个函数的图象关于直线$y=x$对称。指数函数$y=a^x(a>0且\ a\neq 1)$和对数函数$y=\log_a x(a>0且\ a\neq 1)$之所以具有上述的特殊关系，完全是由这两个函数的对应关系之间的特殊关系决定的，我们称具有这种特殊关系的两个函数互为反函数。

本环节通过研究指数函数$y=a^x(a>0且\ a\neq 1)$和对数函数$y=\log_a x(a>0且\ a\neq 1)$的内在联系，突出了代数运算的作用，让学生领悟通过代数运算和函数图象认识函数性质的方法，提高研究函数问题的逻辑性，增加理性思维的成分。

（四）初步应用，培养技能。

题1　求下列函数的定义域：

$y=\log_3 x^2$；

$y=\log_a(4-x)\quad(a>0,且a\neq 1)$.

题2　比较下列各题中两个值的大小：

$\log_2 3.4$，$\log_2 8.5$；

$\log_{0.3}1.8$，$\log_{0.3}2.7$

$\log_a 5.1$，$\log_a 5.9\ (a>0,且a\neq 1)$

题3　若$\log_a\frac{3}{4}<1$，求实数a的取值范围。

题1检测了对数函数的定义域的掌握情况，题2和题3检测了对数函数的单调性的情况及分类讨论的数学思想。

初高中数学学习的差异是由学习内容的抽象程度所决定的，相伴相随的是对逻辑严谨性要求的提高。但从认知规律看，数学概念、定理的形成一般是“起始于直觉，完成于逻辑”，因此“思想先行于逻辑，推理紧跟着直觉”，使学生有一个逐步走向严谨的过程，不仅符合学生的认知规律，也与数学知识发展规律相吻合。

参考文献

[1]章建跃.核心素养立意的高中数学课程教材教法研究.华东师范大学出版社，2019