“交点法”巧解空间几何体的外接球问题

张　磊　梁　芳

（中央民族大学理学院　北京　100081）

[摘　要]“空间几何体的外接球问题”是近些年高考重难点之一，题目常以选择或填空的形式出现，本文通过分析一些常考题型，总结归纳为“交点法”，为学生解决此类问题提供一定的参考。

[关键词]空间几何体；外接球；数学核心素养；交点法

【DOI】10.12252/j.issn.2096-6261.2020.05.1495

近年来求多面体的外接球问题在高考试题、各模拟试题中频频出现，成了热点问题[1]，同时也是考试内容的重难点之一。解决外接球问题要求学生不仅要具备一定的几何直观与空间想象能力，还需拥有良好的计算能力。面对这类题目，学生往往难以下手，如何有效突破“几何体的外接球问题”也成了众多考生们聚集的焦点之一。外接球问题看似变化多端，无论题目如何变幻，抓住“外接球”问题的本质——球心位置，才是解决此类问题的核心。

我们知道，球心到球面上各点的距离都等于半径，因此哪个点到多面体的各个顶点的距离相等，那么这个点就是球心[2]；同时，球的半径 R、截面圆半径 r、球心到截面圆圆心的距离 d 满足等式关系：$r^2+d^2=R^2$。所以，若能找到球内的两个不平行的截面圆，并作出两条对应过截面圆圆心且垂直截面的直线，则这两条直线的交点即为球心。“交点法”是解决很多外接球相关问题的通法，本文通过分析以下两类情形，供读者参考。

一、直接找出直线交点，交点即为球心位置

例1：已知三角形 PAD 所在平面与矩形平面 $ABCD$ 垂直，$PA=PD=AB=2$，$\angle APD=90°$，若点 P,A,B,C,D 在同一球面上，则此球的表面积为______.

思路探求：如图1根据“交点法”，我们可知 ΔPAD 的外接圆圆心 O_1 为 AD 的中点；又矩形平面 $ABCD$ 的外接圆圆心 O_2 为矩形的中心过 O_1，且与 ΔPAD 所在截面圆垂直的直线在平面 $ABCD$ 内恰与过 O_2 且与矩形 $ABCD$ 所在截面圆垂直的直线交于 O_2 点外接球球心为 O_2，$R=AO_2=\sqrt{AO_1^2+O_1O_2^2}=\sqrt{3}$，$S=4\pi R^2=12\pi$.

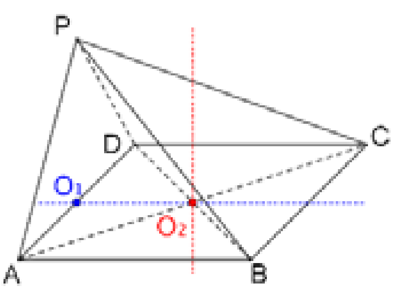

图1

方法点睛：当空间几何体的某些面为特殊的多边形，将其外接圆作为几何体外接球的截面圆，分别作两个过截面圆圆心且垂直截面圆的两条直线的交点即为球心，问题将迎刃而解。

二、无法直接确定交点，建立等式巧解问题

例2：已知三棱锥 $A-BCD$ 中，$AB=AC=BC=2, BD=CD=\sqrt{2}$，点 E 是 BC 的中点，点 A 在平面 BCD 上的射影恰好为 DE 的中点，则该三棱锥外接球的表面积为______.

思路探求：如图2，根据题设可得 $BD^2+CD^2=4=BC^2$，故 $BD\perp CD$，该三棱锥对于 ΔBCD 与 ΔBCA，我们都可以找到这两个三角形的外接圆圆心位置，但是 ΔBCA 所在平面与 ΔBCD 所在平面位置关系难以直接确定，过点 E 作底面截面圆的垂线并过 ΔBCA 的外接圆圆心所作此截面圆的垂线，作图无法直接找到两者的交点，无法确定球心的位置。此时，我们会发现题目还存在“点 A 在平面 BCD 上的射影恰好为 DE 的中点”这一条件，假设点 A 在平面 BCD 上的射影为点 F，则有 $AF\perp$ 平面 BCD，又球心 O 必位于过 E 点且垂直于平面 BCD 的直线上，则有 $AF\parallel OE$，四边形 $OEFG$ 为直角梯形。O 点已满足 $OB=OC=OD$，只要建立等式 $OC=OA$ 即可。

$$AF=\sqrt{AC^2-CF^2}=\frac{\sqrt{11}}{2},$$

假设

$$OE=GF=x,\ OA^2=OG^2+AG^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{11}}{2}-x\right)^2\quad OC^2=CE^2$$

$$+OE^2=1+x^2.\ OC^2=OA^2.\ 解得\ x=\frac{3}{\sqrt{11}}, R^2=\frac{20}{11}, S=4\pi R^2=\frac{60}{11}\pi.$$

方法点睛：当“交点法”无法直观确定球心位置，先确定球心在过一个特殊多边形外接圆圆心作此截面圆的垂线上，再由球心到此多边形顶点的距离等于球心到几何体上另一顶点的距离，将问题化繁为简，确定外接球的球心位置。这类问题对作图与计算能力提出更高的要求，在掌握空间几何体的结构特征的基础上，还要寻求其中的等式关系，建立等式巧解问题。

参考文献

[1]高用.怎样的四面体能够补成长方体?——谈补形法求解四面体外接球问题[J].中学数学研究（华南师范大学版），2020（03）：48-50.

[2]朱贤良.众里寻“心”千百度　繁华落尽识真颜——确定多面体外接球球心位置的一般途径与四个特殊模型[J].中学数学研究（华南师范大学版），2019（21）：29-33.

作者简介：

张磊（1994-），男，汉族，山西太原人，中央民族大学硕士研究生，主要从事数学教育研究。

梁芳（1970-），女，汉族，山西朔州人，中央民族大学副教授，博士，主要从事数学教育哲学研究。

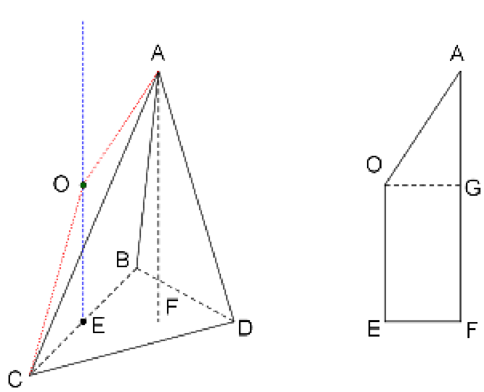

图2