

# 高频错题里的一缕光 演绎教材“课题学习”的精彩

## ——一道选择题错题的纠错之路与思考

张轶婷

杭州市建兰中学

**[摘要]** 文章记述了一道选择题的意外经历, 惊现意外之错, 收获意外之喜。题目很典型, 枚举法的运用很常规, 但要一个不少那就不简单, 恰恰题目给出的答案也有纰漏。分析如何运用平行四边形的判定来准确枚举, 思辨如何巧妙的设定分类标准, 善用皮克定理找到验证此类问题的通法。看似是学生令人惊喜的创新解题, 实际是教材中课题学习思维浸润后的一种高阶思维能力的外显。

**[关键词]** 平行四边形判定; 枚举法; 皮克定理; 课题学习; 高阶思维

**[DOI]** 10.12252/j.issn.2096-6261.2021.10.1027

### 一、意外错题惹“缘起”

#### 1. 背景分析

此题是八年级(下)平行四边形单元复习时留给学生的一道思考题, 它选自菁优网, 标签中注明的是某校级模拟考题。笔者选择该题的理由如下: (1) 该题考查的知识点是平行四边形判定定理的应用, 是本章节重点内容; (2) 将问题与格点结合, 除了必要的逻辑分析外, 还需要一定的几何作图能力; (3) 枚举法的可操作性很强, 不同程度的学生都能上手, 但难点是要能找出符合条件的所有平行四边形; 总结说来, 此题比较典型, 但也易错, 有一定难度, 为更客观的了解学生的想法, 操作时将此题改成了填空题。

#### 2. 意料之内

和预想吻合, 43位同学中共有36人提交了答案, 提交率83.7%, 大部分学生都觉得有能力解决此题, 但是答案却是五花八门。从表1可以看出, 答案填写“25”的人数最多, 达13人, 占比36.1%; 回答“24”的人数次之, 达8人, 占比22.2%; 另有5人填写了“27”, 占比13.9%; 回答“29”或“31”的各2人, 分别占比5.56%; 其它答案6人, 占比13.9%。

学生答案	人数	学生答案	人数
15	1人	27	5人
23	3人	29	2人
24	8人	31	2人
25	13人	41	2人

#### 3. 错因分析

观察图形, 面积为2的平行四边形一般会考虑按照边长为1, 高为2或边长为2, 高为1的标准进行分类, 再根据平行四边形的判定定理——一组对边平行且相等的四边形为平行四边形, 从而画出符合条件的图形。掌握了该题枚举法的依据, 学生解题中呈现的错误主要集中在两处: (1) 分类标准中, 只考虑了边长为整数的情况, 忽视了网格图中边长为无理数的情况, 当边长为 $\sqrt{2}$ 时的正方形, 显然也是符合题意的; (2) 枚举时忽视了去重原则, 对于重复出现的 $1 \times 2$ 的矩形未做处理; 该题提供的标准答案是25个, 似乎一切都很完美!

#### 4. 意料之外

在学生作答结果中, 有5人填写了27个, 而且都是学习能力较强的孩子, 他们再三思考后提出了疑义, 认为标准答案有误。因为边长为 $\sqrt{2}$ 的平行四边形, 除了已分析的正方形外, 还有其它平行四边形存在。从图2可以发现, 由正方形的轴对称性可得, 它们分别位于点A的左右两侧。他们认为, 正确答案可能是27个! 这真是尴尬的错误, 出题者想考查的是如何确定分类标准, 不遗不漏的枚举所有符合条件的图形, 但恰恰也有疏漏。

### 二、本是无心却“成荫”

#### 1. 疑惑之音

发声质疑的学生很谨慎, 用的词是“可能”, 因为他不太确定“27个”是否正确, 也有可能会有更多。不少同学都声援他, 纷纷表示, 虽然这道题是解决了, 也找到了所有符合条件的图形, 但如果网格图变更大, 又会很难判断符合条件的图形总数, 做的答案常常审核好几遍也不敢确定是否正确。能否有一种通法, 来验证枚举法作图的准确性。

#### 2. 意外之喜

激烈的讨论后, 有学生提出这也是格点多边形的面积计算问题, 是否可以用皮克定理推理证明。不妨设 $a$ 为平行四边形内部格点的个数,  $b$ 为平行四边形边上的格点个数。已知平行四边形的面积为2, 根据皮克定理, 可得:  $a + \frac{b}{2} - 1 = 2$ , 即

因为 $a \geq 0$ ,  $b \geq 4$ , 所以 $0 \leq a \leq 1$ 。而 $a, b$ 为自然数, 那么当 $a=0$ 时,  $b=6$ ; 当 $a=1$ 时,  $b=4$ 。找出方格中符合如下条件的特征点: 这些点与点A连接的线段上, 除了两个端点外, 只经过一个格点, 把这些点记作点 $P_1, P_2, \dots, P_7$ 。若平行四边形除点A外的另三个顶点中有两个或三个顶点与点 $P_1, P_2, \dots, P_7$ 重合, 面积显然大于2, 故不可能。

当 $a=0, b=6$ 时, 平行四边形边上的格点个数为6, 则平行四边形一组邻边经过的格点个数分别是2和3。那么, 总有一条以点A为端点的边经过的格点个数是3, 这一边的另一个端点必定与点 $P_1, P_2, \dots, P_7$ 中的一个重合。当 $a=1, b=4$ 时, 平行四边形内部的格点个数为1, 则这个格点一定是该平行四边形的对称中心, 记这个对称中心为点O, 倍长AO到点B, 点B必定与点 $P_1, P_2, \dots, P_7$ 中的一个重合。综上: 平行四边形有且仅有一个顶点与点 $P_1, P_2, \dots, P_7$ 中的一个重合。学生的想法很精彩!

#### 3. 深度解析

继续研究, 将这个平行四边形上与点 $P_1, P_2, \dots, P_7$ 中的一个重合的这个点记作点C。

若点C与 $P_1$ 重合。因为平行四边形有且仅有一个顶点与点 $P_1, P_2, \dots, P_7$ 中的一个重合, 所以平行四边形的另外两个顶点落在如图4的点上, 这样的平行四边形有3个,  $P_2$ 同理, 也有3个。

若点C与 $P_3$ 重合。因为平行四边形有且仅有一个顶点与点 $P_1, P_2, \dots, P_7$ 中的一个重合, 故平行四边形另两个顶点落在如图5的点上, 这样的平行四边形有4个,  $P_4$ 同理, 也有4个。

若点C与 $P_5$ 重合。因为平行四边形有且仅有一个顶点与点 $P_1, P_2, \dots, P_7$ 中的一个重合, 所以平行四边形的另外两个顶点落在如图6的点上, 这样的平行四边形有2个,  $P_6$ 同理, 也有2个。

若点C与 $P_7$ 重合。因为平行四边形有且仅有一个顶点与点 $P_1, P_2, \dots, P_7$ 中的一个重合, 所以平行四边形的另外两个顶点落在如图7的点上, 这样的平行四边形有2个,  $P_8$ 同理, 也有2个。

#### 4. 追本溯源

皮克定理的思维起点, 源自浙教版八年级下册课题学习《格点多边形的面积计算》。作为经典的数学定理, 很多学生在小学数学中都有接触, 能直接套用公式进行计算, 但由于缺乏对公式原理的认知, 一旦转化问题情境, 学生又陷入了完全不会的境地, 这就是只记公式不懂原理的苦。笔者在指导本节课学习内容时, 从基本的格点三角形入手, 进而研究格点四边形、格点五边形, 通过割补法等常用面积计算法的结合, 指导学生探究格点多边形的面积大小与哪些变量有关。在猜想和论证的过程中, 运用控制变量、枚举、函数建模等手段, 让学生体会特殊到一般的数学思想方法。深入检验模型时, 还融入了格点凹多边形面积的研究, 并将正方形格点延伸至正三角形格点及平行四边形格点等等, 让公式的证明更严谨, 数学方法的应用更科学。另外, 学生还做了皮克定理的数学史资料, 不仅激发了学生的学习兴趣, 还学习了皮克的探究精神。所以, 当学生应用皮克定理来寻找符合条件的平行四边形时, 不觉意外, 却很惊喜。

### 三、深度思考促“发展”

数学教育的本质是理性精神的培养,通过科学系统的课程设计,塑造学生实事求是的品格,简洁完美的思维方式和行为习惯,而教材中的课题学习就是实现这些育人目标的重要途径,它能为学习者提供很好的思维活动场景,引导学生主动内化知识结构,促进思维的高阶发展。因此,笔者认为,课题学习的教学要充分理解其设计内涵,让学生在浸润式的数学环境中,慢慢思考,深入探究,用心感悟。

#### 1. 学教方式发展

改进学生学习方式是数学教育改革的核心。传统的班级授课制以教师为主导,学生已接受式为主,缺少自主探究合作交流,而教材的课题学习很重视学生的亲身实践,能给学生提供很好的主动探索场景。譬如:七下课题学习《关于“初中生最爱看的电视节目”的调查》、八上课题学习《怎样选择较优方案》,在此类问题解决的过程中,学生需自主制订研究计划,确定调查内容,学习计算机软件绘制统计图表;收集整理数据,综合运用统计中各特征数的相关知识分析数据;交流合作,多元评价辅助,不断修改和完善建议;最终形成一份完美的调查报告。教师不再是单纯的备课讲课,而是做基于学习活动的指导者,激发学生主动参与数学思维活动的积极性。

#### 2. 理性精神发展

浙教版教材中的课题学习精选了在数学发展进程中产生过重要影响的、有里程碑意义的数学问题为线索和载体组织数学课程,譬如八年级下课题学习《格点多边形的面积计算》,这是奥地利数学家皮克在1899年给出的,皮克定理的发现过程是崎岖的,但正是他锲而不舍的思考,严格的逻辑推理,才最终为格点几何与微分几何做出了卓越的贡献。充分挖掘数学史蕴含的理性精神,让学生感知数学家是如何发现问题提出问题的,同时让学生体悟数学家在思考解决问题中所秉持的钻研精神和科学态度,潜移默化的帮助学生形成正确的价值观念和必备品格。

#### 3. 高阶思维发展

数学是训练思维的学科,但目前的数学教学常被大量的刷题替代,一味追求解题的模型和技巧,使得学生的考试成绩虽有提高,但数学思维得不到高阶发展。教材课题学习建立在学生已

完成基本知识点的学习上,问题的解决没有唯一的标准,需要综合多个单一的知识点,譬如九年级上课题学习《有关多边形的折纸》,学生已学习了各类全等图形的性质、正多边形的性质、轴对称的性质,但如果要用正方形折出一个正三角形,那就需要深入分析折痕构造图形的基本原理。在真实的问题情境中,教师以问题导向,搭建思维支架;学生充分讨论,研究多种方法实现相等线段的转化;教师继续提升探索场景,让学生在复杂图形中深入思考;学生从感知学习到类比学习,最后到创造性学习,这个深度学习的过程就收获了高阶思维。

#### 4. 核心素养发展

新课改关注课堂教学下的学科核心素养培养,要求充分挖掘学科的育人价值,落实立德树人的根本任务。课题学习是任务驱动型的学习项目,譬如:九下《会徽中的数学》,不仅学习了解直角三角形的数学知识,还在智力活动中感悟数形结合的思维方式,个体智力得到锻炼和发展,这是落地学科的育智价值;经历会徽中数学知识的挖掘与欣赏过程,并能从2002年国际数学家大会会徽中提出两个数学问题,不仅发现美,还会鉴赏美,创造美,这是落地学科的育美价值;解读国际数学家大会和国际数学教育大会,使学生更好地理解数学与世界的共生关系,切实肩负起解决社会现实问题的责任,这是落地学科的育德价值。

学科核心素养导向的课题学习教学,能全面提升学生的综合素养,对于学生未来发展具有重要意义。

#### 参考文献:

- [1]Eric Jensen LeAnn Nickelsen温暖译.深度学习的7种有力策略[M].华东师范大学出版社,2017.
- [2]章建跃.数学教育随想录(上卷)[M].浙江教育出版社,2019.
- [3]章建跃.数学教育随想录(上卷)[M].浙江教育出版社,2019.
- [4]余文森.核心素养导向的课堂教学[M].上海教育出版社,2017.
- [5]周磊.巧构图,妙发现,精打磨[J].初中数学教与学,2019(11):58-60

### (上接第1728页)

#### (四)模仿——绘画能力提高的重要方式

在日常生活中,模仿贯穿始终,尤其是3-6岁的儿童。他们的知识主要是通过模仿获得的。在绘画活动中,儿童绘画能力的提高在一定程度上也是通过模仿来实现的。可是,我们在给孩子们提供范画。让孩子们模仿的同时,会产生一个问题——老师的示范是否会阻碍孩子创造力的发展,示范或不示范是常令老师纠结的一个问题。

模仿是人类发展过程中学习新行为的有效途径,是模仿让儿童完成了自我建构,模仿既可以促进幼儿创造的产生,也可以阻碍幼儿的创造。这主要取决于教师是将幼儿的模仿看成是幼儿自我表达的一种方式,还是仅仅为简单的模仿。模仿是扩大幼儿经验的一种途径,在模仿的过程中,培养了幼儿的观察力和理解力,让孩子体验到知觉的、情感的、审美等方面的经验。

在绘画活动中,幼儿已经开始学习线条画。对于从来没有用笔徒手画过画的孩子而言。这将是一个难关。孩子可能不愿意动手画,甚至是不敢画,怕画错了。针对这种情况。老师通常会事先画好一张范画,让幼儿参考,有了范画,孩子们就像吃了一颗定心丸,敢尝试作画了。当然,在这之前,老师需要把绘画的要求讲得仔细、讲得明白,这样孩子们才会心里有一杆秤。同时,教师不应以“相似性”作为评价作品质量的唯一标准,而应充分肯定和积极评价儿童绘画作品。当孩子们坚持模仿老师的模型画而不是独立创作时。教师可以表扬有创新精神的孩子,展示他们的作品,为孩子们提供更多的绘画经验,让他们不怕困难,敢于尝试。我们应该努力使模仿成为

提高儿童绘画能力的一种方式,而不是一种约束。

### 三、结束语

美术教育是幼儿教育阶段非常重要的环节,通过绘画活动能够更好地激发幼儿的审美兴趣,让幼儿在更加丰富多彩的学习生活之中获得相应能力的提升。绘画活动的设计要以核心素养的培养为目标,教师要鼓励幼儿去理解并感受美术,通过绘画活动的参与逐步将自身的各项美术核心素养切实提高起来。

#### 参考文献:

- [1]黄爱萍.“游戏法”培养幼儿美术核心素养[J].教育,2019(49):39.
- [2]蒋慧娇.中职学前教育专业学生美术核心素养培养研究[J].职业,2021(16):16-18.
- [3]蔡燕.相机融入信息元素优化美术学科教学——以核心素养引领下幼儿美术新课程教学为例[J].第二课堂(D),2021(02):7-8.
- [4]姚文.基于核心素养下幼儿美术教育的实践分析[J].读写算,2020(28):37-38.
- [5]赵文玉.如何将人文教育融入美术教学中[J].作家天地,2020(17):168+170.
- [6]王彦力.幼儿教师美术核心素养研究[J].科教文汇(下旬刊),2020(06):151-152.
- [7]康萍.基于幼儿艺术领域中核心素养的实践研究[J].鸭绿江(下半月),2019(12):56.