“解析几何”解题课例
——以2020年高考全国三卷理科数学第20题为例

陈霞

贵州省平坝第一高级中学

[摘　要]在新课程标准要求下，结合新课程标准的数学核心素养，解析2020年全国Ⅲ卷理科数学第20题的多种解法的特点,挖掘“一题多解”的知识内在联系，提出要结合高考数学的命题特点研究，引导学生建构符合年龄特征和身心状况的知识体系。

[关键词]高考数学真题；一题多解；解析几何

【DOI】10.12252/j.issn.2096-6261.2021.10.1091

一、教学设计

（一）知识点

直线、椭圆有关知识，两点间距离公式，点到直线距离公式，三角形面积公式，三角形全等，复数乘法几何意义，向量有关知识。

原题再现：（2020年全国高考Ⅲ卷数学理科第 20题 [1]）

已知椭圆 $C:\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{m^2}=1(0<m<5)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{15}}{4}$， A， B 分别为C的左、右顶点。

1.求C的方程；

2.若点 P 在 C 上，点 Q 在直线 $x=6$ 上，且 $|BP|=|BQ|$，$BP\perp BQ$，求$\triangle APQ$的面积。

（二）学习背景

1.教材分析。圆锥曲线与科研，生产以及人的生活有着紧密的关系。早在16，17世纪之交，开普勒就发现行星绕太阳运行的轨道是一个椭圆等，所以解析几何是17世纪数学发展的重大成果之一，其本质是用代数方法研究图形的几何性质，体现了数形结合的重要数学思想，高中同学们通过对圆锥曲线的学习，掌握圆锥曲线的基本几何性质，能感受到圆锥曲线在刻画现实世界和解决实际问题中多应用可以引发学生学习圆锥曲线的知识，是高考考察的重点和热点，主要是考察的作用。为什么圆锥曲线有如此巨大的作用呢？我们可以从它的几何特征以及性质中找到答案。圆锥曲线的诸圆锥曲线的方程及其简单几何性质，直线与圆锥曲线的综合性问题，因此有必要将其作为高三复习的一题一课展开教学。

2.学情分析。大部分学生对直线与圆锥曲线的综合问题，往往会有心理障碍，比较害怕，容易放弃。究其原因，解析几何本身的概念、计算比其他数学概念计算要复杂得多，很多学生对于解析几何知识只是机械式记忆，对于解析几何的解题思想只是模仿的接受，只有少数学生能灵活的应用其思想解题，很多学生进而消极面对解析几何的后续学习和解题。本课例根据学生实际情况，引导学生归纳解析几何常用的解题思路与结论。

3.核心问题。本课例内容是直线，圆锥曲线，简单平面几何的综合问题，核心问题是引导学生利用平面几何知识分析解析几何的计算问题。

（三）课时目标

1.知识与技能。通过对本试题的研究，引导学生检查自身对简单平面几何与解析几何知识的掌握情况。学生能够熟练应用弦长公式、三角形的面积公式、直线、向量、椭圆等有关知识和技能解决圆锥曲线的综合问题。

2.核心素养目标。通过本课例教学，培养学生学会用数学思维思考，学会用数学语言表达问题，增强学生的数学抽象，直观想象，逻辑推理，数学运算等核心素养。

（四）教学重难点

教学重点：直线与圆锥曲线综合问题的解题思路，平面几何与解析几何的结合。

教学难点：引导学生探寻平面几何与解析几何综合问题常用的解题思路。

（五）设计思路

本课例采用问题串教学方式，通过对高考真题的解法分析，体会平面几何与解析几何结合问题解决的基本模式。并通过对真题解法进行逐一拓展分析，引导学生总结该类问题常用的解题思路，从而提升学生逻辑推理，数学运算，数学抽象，数据处理等方面素养。

二、教学过程

（一）着重对第二问进行一题多解

[本题答案]（1） $\frac{x^2}{25}+\frac{16y^2}{25}=1$；（2） $\frac{5}{2}$。

[分析]本题第一小问主要考察椭圆相关的基本概念，考察学生的基本运算能力比较简单；第二小问考察学生的基本逻辑推理能力、直观想象能力、数据分析、数学运算能力，难度总体较大，下面从第二小问谈谈本题的多种解法。

1.因为 $C:\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{m^2}=1(0<m<5)$，可得 $a=5$， $b=m$，根据离心率公式$e=\frac{c}{a}$，结合已知，即可求得答案；

2.点 P 在 C 上，点 Q 在直线 $x=6$ 上，且 $|BP|=|BQ|$， $BP\perp BQ$，过点 P 作 x 轴垂线，交点为 M，设 $x=6$ 与 x 轴交点为 N，可得$\triangle PMB\cong$ BNQ，可求得 P 点坐标，求出直线 AQ 的直线方程，根据点到直线距离公式和两点距离公式，即可求得$\triangle APQ$的面积；求出P、Q坐标后也可以结合向量有关的知识直接求面积，即

$$S_\Delta=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AP}|\cdot|\overrightarrow{AQ}|\sin\langle\overrightarrow{AP},\overrightarrow{AQ}\rangle=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AP}|^2\cdot|\overrightarrow{AQ}|^2-(\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ})^2}。$$

问题：本题第一问考察椭圆哪些定义？

学生：椭圆标准方程的理解，椭圆离心率公式。

解：（1）$\because$ $C:\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{m^2}=1(0<m<5)$

$\therefore$ $a=5$， $b=m$，

根据离心率 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2}=\sqrt{1-\left(\frac{m}{5}\right)^2}=\frac{\sqrt{15}}{4}$，

解得 $m=\frac{5}{4}$或 $m=-\frac{5}{4}$（舍），

$\therefore$ C 的方程为：$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{\left(\frac{5}{4}\right)^2}=1$，即 $\frac{x^2}{25}+\frac{16y^2}{25}=1$；

3.解法一：作辅助线，利用平面几何性质三角形的全等性质解决。

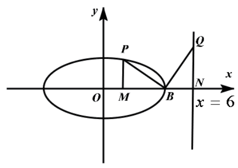
问题：直线x=6在椭圆哪个位置？通常曲线上点位置没有指定时，我们怎么办？

学生：由椭圆的对称性，不妨设P，Q在x轴上方

问题：$\because$点 P 在椭圆 C 上，点 Q 在直线 $x=6$ 上，且 $|BP|=|BQ|$， $BP\perp BQ$，解析几何中出现相等、垂直时，通常是不是思考一下相应的平面几何知识？

学生：过点P作x轴垂线，垂足为点M，设$x=6$与x轴交点为N

根据题意画出图形，如图



$\because |BP|=|BQ|$，$BP\perp BQ$，$\angle PMB=\angle QNB=90°$，

又$\because \angle PBM+\angle QBN=90°$，$\angle BQN+\angle QBN=90°$，

$\therefore \angle PBM=\angle BQN$，

问题：可以得到什么结论？

学生：根据三角形全等条件“AAS”，可得：$\triangle PMB\cong\ BNQ$，

$\because \dfrac{x^2}{25}+\dfrac{16y^2}{25}=1$，$\therefore B(5,0)$，

$\therefore |PM|=|BN|=6-5=1$，

问题：求出|PM|长可以解决什么问题？

学生：设P点为(x_P,y_P)，

可得P点纵坐标为$y_P=1$，将其代入$\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{16y^2}{25}=1$，可得：$\dfrac{x_P{}^2}{25}+\dfrac{16}{25}=1$，

解得：$x_P=3$或$x_P=-3$，$\therefore P$点为$(3,1)$或$(-3,1)$，

问题：P有几种位置关系？

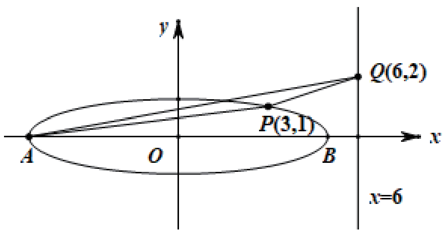
学生：两种。

4. 当P点为$(3,1)$时，故$|MB|=5-3=2$，

$\because \triangle PMB\cong\ BNQ$，$\therefore |MB|=|NQ|=2$，

问题：求出|NQ|又可以解决什么问题？

学生：可得：Q点为$(6,2)$，画出图象，如图



$\because A(-5,0)$，$Q(6,2)$，

问题：A、P、Q三点坐标知道后求解的面积有几种方法？

学生：两种。

面积的解法一：

问题：利用什么求面积？

学生：底乘高的一半。

可求得直线AQ的直线方程为：$2x-11y+10=0$，

根据点到直线距离公式可得P到直线AQ的距离为：$d=\dfrac{|2\times3-11\times1+10|}{\sqrt{2^2+11^2}}=\dfrac{|5|}{\sqrt{125}}=\dfrac{\sqrt5}{5}$，

根据两点间距离公式可得：$|AQ|=\sqrt{(6+5)^2+(2-0)^2}=5\sqrt5$，

∴ΔAPQ面积为：$S=\frac{1}{2}\times5\sqrt5\times\frac{\sqrt5}{5}=\frac{5}{2}$；

面积解法二：

问题：利用什么求面积？

学生：两边及其夹角的正弦值的一半。

$\because A(-5,0)$，$Q(6,2)$，$P(3,1)$

$\because \overrightarrow{AP}=(8,1),\overrightarrow{AQ}=(11,2)$，

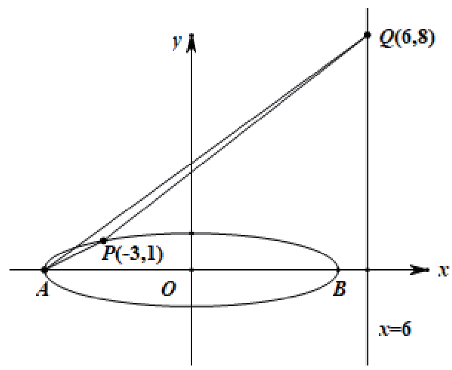
$\therefore S_\Delta=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AP}|\cdot|\overrightarrow{AQ}|\sin\langle\overrightarrow{AP},\overrightarrow{AQ}\rangle=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AP}|^2\cdot|\overrightarrow{AQ}|^2-(\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ})^2}$

$=\sqrt{(64+1)\times(121+4)-(8\times11+1\times2)^2}=\frac{5}{2}$

当P点为$(-3,1)$时，故$|MB|=5+3=8$，

$\because \triangle PMB\cong\ BNQ$，$\therefore |MB|=|NQ|=8$，

可得：Q点为$(6,8)$，画出图象，如图



$\because A(-5,$ $Q(6,8)$，

面积的解法一：

可求得直线AQ的直线方程为：$8x-11y+40=0$，

根据点到直线距离公式可得P到直线AQ的距离为：$d=\dfrac{|8\times(-3)-11\times1+40|}{\sqrt{8^2+11^2}}=\dfrac{|5|}{\sqrt{185}}=\dfrac{5}{\sqrt{185}}$，

根据两点间距离公式可得：$|AQ|=\sqrt{(6+5)^2+(8-0)^2}=\sqrt{185}$，

∴ΔAPQ面积为：$S=\frac{1}{2}\times\sqrt{185}\times\frac{5}{\sqrt{185}}=\frac{5}{2}$，

面积解法二：$\because A(-5,0)$，$Q(6,8)$，$P(-3,1)$

$\because \overrightarrow{AP}=(2,1),\overrightarrow{AQ}=(11,8)$

$\therefore S_\Delta=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AP}|\cdot|\overrightarrow{AQ}|\sin\langle\overrightarrow{AP},\overrightarrow{AQ}\rangle=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AP}|^2\cdot|\overrightarrow{AQ}|^2-(\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ})^2}$

$=\sqrt{(4+1)\times(121+64)-(2\times11+1\times8)^2}=\frac{5}{2}$

综上所述，ΔAPQ面积为$\frac{5}{2}$。

问题：同学们的收获是？

学生：

评析：本题的这种解法紧紧扣住|BP|=|BQ|,直线BP与直线BQ垂直的条件借助平面几何性质构造三角形，构造出三角形后结合条件得出三角形全等的结论，在由三角形全等性质很快就可以解决P点的纵坐标，从而很快得出P点的坐标，在此过程中求P的坐标计算不复杂，但是对学生而言，这种解法要求学生要有足够扎实的平面几何知识功底，才能轻装上阵。后面在解决三角形面积时也可以选择两种方法，面积的解法一思想直观，计算要麻烦些；而面积的解法二计算较直观，但是计算的向量形式在教学时老师不一定带领学生推导过，因此有的学生不知道，就会选择计算夹角，在用两边及其夹角正弦乘积的一半计算面积，这样的话计算也是比较麻烦的。

（二）知识拓展补充

复数乘法的几何意义

如果把复数z_1，z_2分别写成三角形式如下：

$z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$，$z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$，

就有

$$\begin{aligned}z_1z_2&=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)\\&=r_1\cdot r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2)+i(\sin\theta_1\cos\theta_2+\cos\theta_1\sin\theta_2)]\\&=r_1\cdot r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)],\end{aligned}$$

即：$r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)=r_1\cdot r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)]$

这就是说，两个复数相乘，积的模等于各复数模的积，积的辐角等于各复数的辐角的和。据此两个复数z_1，z_2相乘时，可以先画出分别与z_1，z_2对应的向量$\overrightarrow{OP_1}$，$\overrightarrow{OP_2}$，然后把向量$\overrightarrow{OP_1}$按逆时针方向旋转一个角θ_2（如果$\theta_2<0$,就要把$\overrightarrow{OP_1}$按顺时时针方向旋转一个角$|\theta_2|$），再把它的模变为原来的r_2倍，所得的向

量$\overrightarrow{OP}$,就表示积z_1，z_2（如图），这就是复数乘法的几何意义。

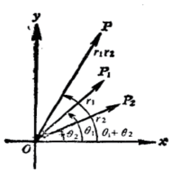


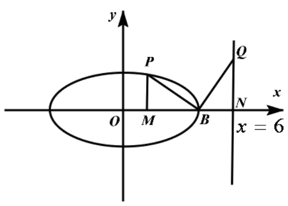
图 5-10

解法二 ：借助复数的几何意义解决。考生不易知道这种解法，因为新课标大纲对复数三角形式不做要求，所以这种解法知道的学生可能要少些，但是如果老师有延伸这个知识点的，那学生处理这个题就会很方便、快捷。

由椭圆的对称性，不妨设P，Q在x轴上方

∵ 点 P 在 C 上，点 Q 在直线 $x=6$ 上，且 $|BP|=|BQ|$，$BP\perp BQ$，

根据题意画出图形，如图



不妨设点P坐标为(x_0,y_0)，Q坐标为（6，n），∵B(5,0)，

则$\overline{BP}=(x_0-5,y_0)$；$\overrightarrow{BQ}=(1,n)$，向量$\overline{BP}$对应的复数为$z=x_0-5+y_0 i$；

因为向量$\overline{BQ}$可以看成是由$\overline{BP}$绕点B顺时针旋转$\frac{\pi}{2}$得到

故$\overline{BQ}$对应的复数$z_1=z\cdot(-i)=(x_0-5+y_0 i)\cdot(-i)=y_0-(x_0-5)i$

即$\overrightarrow{BQ}=(y_0,5-x_0)=(1,n)$，所以$y_0=1$，$(5-x_0)=n$

又点P (x_0,y_0)在椭圆$\frac{x^2}{25}+\frac{16y^2}{25}=1$上；所以$x_0=3$或$-3$；

即P (3,1)，Q (6,2)；或P (−3,1)，Q (6,8)

计算三角形的面积同解法一。

评析：因为新课标对复数三角的几何意义不作要求，所以学生不易想到，而如果教学时我们老师能补充讲解过这些好的结论，学生处理起来会更加方便，所以惊醒我们的教学要围绕大纲要求合理对知识延伸，对基础较好的学生做辅导，在关键时刻对难题迎刃而解。

解法三：直接算，这种解法直观，重在考查考生的计算能力。

问题：直接算的前提需要做什么？

学生：合理设直线BP，BQ的方程，联立方程求解P的坐标。

解：由（1）得a=5，∴B(5，0)，A(−5,0)

设直线BP的方程为x=ny+5（n≠0），则直线BQ的方程为y=−nx+5n

∵Q在直线x=6上，∴Q(6，−n)

联立直线BP与椭圆方程得

$\begin{cases} x=ny+5 \\ \frac{x^2}{25}+\frac{16x^2}{25}=1 \end{cases}$ $\therefore (n^2+16)y^2+10ny=0$

$\therefore y[(n^2+16)y+10n]=0$ $\therefore y=0$（舍去）或$y=\frac{-10n}{n^2+16}$

把$y=\frac{-10n}{n^2+16}$代入 x=ny+5 得 $P(\frac{80-5n^2}{n^2+16}，\frac{-10n}{n^2+16})$

∵|BP|=|BQ| $\therefore \sqrt{(5-\frac{80-5n^2}{n^2+16})^2+(0-\frac{-10n}{n^2+16})^2}=\sqrt{(6-5)^2+(-n)^2}$

整理得$n^4-68n^2+256=0$

$\therefore (n^2-64)(n^2-4)=0$ $\therefore n^2=64$或$n^2=4$

由椭圆的对称性，不妨取P在x轴上方，从而求解出P的坐标。

$\therefore P(-3，1)$此时 $Q(6，8)$; 或 $P(3，1)$此时 $Q(6，2)$

解决三角形面积问题同解法一

问题：计算量如何？

学生：算到中途会放弃。

评析：这种解法思想较为直观，学生很容易想到，但是计算较麻烦，很多考试计算到中途就选择放弃，对计算能力较强的学生答案也会很快计算出来。

三、学习体验

通过本课例，学生对圆锥曲线弦长与面积问题有了较深刻的理解，尤其是利用平面几何知识求解P的坐标，这个问题突破了，求解三角形面积对于学生而言问题不大。所以本课例提醒了我们的复习注重关注平面几何知识的广泛应用，怎么结合好课本知识进行相应拓展，在本课例的讲解过程中，很多同学充分发表了他们的学习体验，在此过程中增强了他们的学习信心。

学生1：用代数方法，一般我们都习惯设点、设方程，然后联立方程组，结合韦达定理求解，由于时间关系，通常计算到中途会选择放弃。

学生2：结合平面几何知识，在多数时候很便捷，但不容易领会，平时练习时可以多想想几何方法，几何与代数结合，理解而不死背，才能更好地应用。

学生3：在处理面积时有三点坐标，容易想用底乘高的一半这个公式求解，往往这样可能会增加计算量。

学生4：平时很少用$\frac{1}{2}|\overrightarrow{AP}|\cdot|\overrightarrow{AQ}|\sin\langle\overrightarrow{AP},\overrightarrow{AQ}\rangle=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AP}|^2\cdot|\overrightarrow{AQ}|^2-(\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ})^2}$来计算三角形面积，多用等式左端去进行计算，计算思维会害怕。

学生5：感悟考题的变式，平时养成良好习惯，多加练习思维，尽量学会一题多解，多题一解，善于总结，反思。

四、教学反思

本课例的优点：从课本基础知识出发，让学生重视课本，本课例是以问题串形式呈现，学生容易接受，很多学生的能力得到展示，通过本课例让学生更加注重平面几何与解析几何知识结合的好处，平时遇到类似问题要善于发现总结，做到知识的积累，用时善于快速拿出知识。

本课例的不足，没有对问题深入进行一题多变。学生展示环节铺垫不足，因为学生基础一般，所以很多学生不善于表达，学生回答时出现不连贯的情况。

作为教师，平时善于专研，多引导学生养成一题多解，多题一解的良好习惯。现实生活中的诸多问题，并非是由单一因素构成的，其变化和发展的过程以及所产生的影响，往往涉及很多方面。而在高考中，对于数学问题，形势同样如此，分析问题和解决问题的角度、条件、方法就有多种多样，这一客观存在反映在解答数学题中就是“一题多解”。由此发现任何一个数学知识在各自产生和发展的过程中，都与其他概念相关联，这种关联有纵向的，也有与其他知识的横向联系，由此构建的知识网络显现出的一题多解不仅解法灵活，更能呈现出解题者的不同水平，更能折射出题目所其所依附的“知识网络”体系。高考命题解法总是从学科的整体意义的高度去考虑问题，以检验学生能否形成一个有序的网络化的知识体系；而中学数学教学的目的之一就是要引导学生建构符合他们年龄特征和身心状况的知识结构和知识体系，通过一题多解的研究，不仅使解题灵活多样，显现出学生的水平，有利于学生抓住知识间的内在联系，系统完整、融会贯通地掌握知识，有利于学生思维能力的培养与训练。

一题一诗

椭圆直线处处见，面积距离好姐妹。

高中解几难又难，多想几何变简单。

参考文献：

[1]教育部考试中心. 2020年普通高等学校招生全国统一考试大纲的说明[M]. 北京：高等教育出版社，2020.