

# 授人以鱼，不如授之以渔

## ——圆柱与圆锥关系问题策略研究

李坤 韩莹 张禹鑫 何思瑶

北京通州运河小学

**摘要：**《义务教育数学课程标准（2022版）》中明确提出把核心素养设定为义务教育数学课程的统领性目标。义务教育全面开启素养教育时代，固有的知识本位思想被素养本位思想所取代，教师逐渐弱化了对学生知识强化的要求，加强了对学生一系列综合能力的发展与培养，让学生不再是简单的吃“鱼”，而是知“渔”。

**关键词：**核心素养；知识本位；素养本位

**【DOI】** 10.12252/j.issn.2096-6261.2022.04.114

### 一、随笔

在最近的教学中，我发现了这样一种学习现象，大多数学生对于曾经遇到过的几何问题可以很顺利的运用已有直观模型进行问题探究，但是对于相同难度的未经历过的几何问题，大多数学生却“寸步难行”。难道是我们的学生不具备相关学习经验吗？显然，答案是否定的，学生可以解决其他相似的问题，就说明了他们已经积累了解决相关问题的经验。那为什么遇到新问题时学生会“寸步难行”呢？我想，原因可能在于，学生在学习中，习惯了吃“鱼”，忽略了知“渔”。如何破解这种学习现象呢？古人云：“授人以鱼，不如授之以渔”，今天和大家分享就是这样一个知“渔”的案例。

### 二、案例

本案例测试题是六年级下册第一单元圆柱和圆锥第八课时圆柱与圆锥体积关系探究的前测问题，内容包含三个测试问题1. 等底等高的圆柱和圆锥，圆柱体积是12立方厘米，圆锥的体积是多少立方厘米？2. 等体积等高的圆柱和圆锥，圆柱底面积是15平方厘米，圆锥的底面积是多少平方厘米？3. 等体积等底面积的圆柱和圆

锥，圆锥的高是9厘米，圆柱的高是多少厘米？要求学生写出三个测试问题的计算过程和思考过程。测试目标是1. 学生能否根据抽象关系自主构建出几何直观模型？2. 学生是否能够根据两个立体图形特征的抽象关系推理出其他特征的关系？3. 实践操作活动的经历，对于学生几何直观模型的建立和空间观念的发展是否有促进作用？

参与本次测试的学生共有47人，主要错误情况如下：

（一）在测试题1的学生数据中，可以正确进行计算，并通过结论推理、实践过程重推等方法进行说理验证的学生有46人；出现计算错误的学生1人，在对该生进一步说理验证过程分析和个人访谈之后，发现该生思路清晰，认知准确，可以不作为错误案例进行分析。故对于等底等高圆柱与圆锥体积关系的认知，学生的正确率是100%。

（二）在测试题2的学生数据中，学生计算与说理都正确的学生有20人，占比42.55%；错误人数27人，占比57.45%，具体错误情况如下表：

等体积等高的圆柱与圆锥表面积的关系				
错误类型	知识性错误	逻辑性错误	策略性错误	思维障碍
错误表现	混淆圆柱与圆锥体积计算公式	已有“等底等高的圆柱体积是圆锥体积3倍”的关系负迁移到对等体积等高的圆柱与圆锥表面积关系的认知	借助等底等高圆柱与圆锥模型研究等体积等高的圆柱与圆锥表面积的关系	遇到相关问题没有解题思路
人数	10	12	2	3
百分比	21.28%	25.53%	4.26%	6.38%

（三）在测试题3的学生数据中，学生计算与说理都正确的学生有18人，占比38.3%；错误人数29人，占比61.7%，具体错误情况如下表：

### 三、追因

从学生整体情况来看，学生主要呈现两方面典型错因：一是混淆圆柱与圆锥体积公式；二是受“等底等高的圆柱体积是圆锥体积3倍”的结论关系或直观模型负迁移影响。但是，两方面错因的概括过于笼统，并没有

错误类型	知识性错误	逻辑性错误	策略性错误	思维障碍
错误表现	混淆圆柱与圆锥体积计算公式	已有“等底等高的圆柱体积是圆锥体积3倍”的关系负迁移到对等体积等底面积的圆柱与圆锥表高关系的认知	借助等底等高圆柱与圆锥模型研究等体积等底面积的圆柱与圆锥高的关系	遇到相关问题没有解题思路
人数	10	14	2	3
百分比	21.28%	29.79%	4.26%	6.38%

直接指出学生典型问题的核心,为此,我对学生的典型错例再次进行了深度分析,并提炼出两方面的研究问题:一是了解学生思维中有没有“等体积等高”和“等体积等底面积”模型?二是对比抽象关系和具体数量关系对学生探究问题的影响程度是否存在差距?基于这两方面问题,我进一步设计了两方面测试:测试一是学生思维中的几何直观模型,问题包括(1)画一组等底等高的圆柱和圆锥;(2)画一组等体积等高的圆柱和圆锥;(3)画一组等体积等底面积的圆柱和圆锥。测试二是将抽象关系转为具体数量关系能不能帮助学生探究问题,问题包括(1)圆柱和圆锥的底面积都是6平方厘米,高都是2厘米,先想一想谁的体积大?再计算,圆柱体积是多少立方厘米?圆锥的体积是多少立方厘米?(2)圆柱和圆锥体积都是45立方厘米,高都是3厘米,先想一想谁的底面积大?再计算,圆柱底面积是多少平方厘米?圆锥的底面积是多少平方厘米?(3)圆柱和圆锥体积都是36立方厘米,底面积都是4平方厘米,先想一想谁的高大?再计算,圆锥的高是多少厘米?圆柱的高是多少厘米?

几何直观模型测试情况如下表:

	等底等高	等体积等高	等体积等底面积
正确(人数)	47	8	11
正确(百分比)	100%	17.02%	23.4%
错误(人数)	0	39	36
错误(百分比)	0%	82.98%	76.5%

从学生画图测试表中可以看出:“等底等高”圆柱和圆锥的正确率是100%，“等体积等高”圆柱和圆锥的正确率是17.02%，“等体积等高”圆柱和圆锥的正确率是23.4%。对比相关数据,不难看出,如果学生经历过实践操作活动,一般都可以根据立体图形间的特征关系构建出相应几何直观模型。如果没有经历实践操作活动,只凭借不同立体图形特征间的抽象关系,大部分学生是无法自主建构出几何直观模型的,模型构建困难,阻碍了学生对图形与图形特征之间关系的探究。

具体数量关系测试情况如下表:

	等底等高	等体积等高	等体积等底面积
抽象关系	45	3	3
具体数据	2	44	44
正确(人数)	47	42	42
正确(百分比)	100%	89.36%	89.36%
错误(人数)	0	5	5
错误(百分比)	0%	10.64%	10.64%

从具体数据测试表中可以看出:“等底等高”圆柱和圆锥的正确率是100%，“等体积等高”圆柱和圆锥的正确率是89.36%，“等体积等高”圆柱和圆锥的正确率也是89.36%。对比相关数据,不难看出,如果学生理解图形特征与图形特征之间的关系,大部分学生会从抽象关系的角度解决问题。如果不理解图形特征与图形特征之间的关系,学生普遍会选择数据计算解决问题。整体对比之前的测试结果,还可以看出将圆柱与圆锥特征间的抽象关系转换成具体数量关系之后,学生通过数据计算更容易获得两个立体图形第三特征之间的关系。

回过头来,我再次分析了第一次测试中完全正确的18名同学,又进一步发现其中12人是通过设定数据计算出结果的,只有6人是通过特征与特征之间的抽象关系推理出第三特征之间的关系。这一发现进一步说明了,大多数学生的思维中并没有形成“等体积等高”和“等体积等底面积”模型。

#### 四、策略

通过以上深度分析,我们基本可以确定本节课教学的基本策略是:通过实践活动让学生自主建构出“等体积等高”和“等体积等底面积”圆柱圆锥几何直观模型,并从抽象关系和具体数量关系两个角度解决相应问题。具体策略内容是:

##### (一) 借助实践活动,构建几何直观模型

正如之前追因分析中所说:“如果学生经历过实践操作活动,一般都可以根据立体图形间的特征关系构建出相应几何直观模型。如果没有经历实践操作活动,只凭借不同立体图形特征间的抽象关系,大部分学生是无法自主建构出几何直观模型的,模型构建困难,阻碍了

学生对图形与图形特征之间关系的探究。”

由此可见，在课堂教学中，我们要搭建这样一个实践活动平台：让学生经历分析抽象关系，从关系中发现不同立体图形特征间的关联，从关联中初步建立起几何直观模型，并通过观察模型获得基本特征发现，再通过测量模型获得进一步特征发现，最后将抽象关系转化为具体数量关系进行特征验证分析，并通过公式关系推演进行结论呈现。学生对这一系列活动的经历，有助于自主构建出“等体积等高”和“等体积等底面积”圆柱圆锥几何直观模型，发展空间观念。

## （二）抽象与具体并重，促进学生多角度思考问题

在小学阶段，学生普遍认为抽象关系要比具体数量关系更难理解，更难应用。在教学实践中，大部分老师和学生倾向于先将抽象关系具体化，再解决问题。这些都直接导致了学生在小学阶段对抽象关系的理解普遍弱于对具体数量关系的理解，也为学生相关方面错例频发埋下了伏笔。

在本节课教学中，我们也会遇到这样的问题，一方面是抽象关系的难于理解，让学生望而却步；另一方面是学生普遍认为将抽象关系具体化，可以获得更高的解决问题的正确率。如果站在小学阶段来看，弱化对抽象关系的认识对学生不会产生太大影响，但是如果站在学生初中、高中、甚至大学的角度来看，小学阶段抽象关系的弱化会对一些学生未来的学习形成巨大困境。有鉴于此，在活动内容设计上，我们要将分析抽象关系、理解抽象关系、建立抽象关系模型、验证抽象关系、从抽象到具体、再从具体到抽象融入各个活动环节，并以几何直观模型为桥梁，联通抽象关系与具体数量关系，推动学生对两者认识的均衡发展，进而促进学生多角度思考问题。

基于以上策略研究，我认为本节课的教学活动主要包括两部分，第一部分是从对抽象关系的理解到具体关系的建模，第二部分是从具体关系模型到抽象关系模型的再建立。

首先，让学生经历用橡皮泥制作等体积等高和等体积等底面积的圆柱和圆锥，通过观察发现圆锥的高比圆柱的高要高一些，圆锥的底面积要比圆柱的底面积大一些，学生在活动过程中，借助直观模型从抽象关系的角度初步发现了图形与图形间特征与特征的关系，并获得了一些猜想；其次，让学生经历动手测量圆柱与圆锥高

和底面积验证猜想的过程，通过数据对比，学生进一步接近对等体积等高和等体积等底面积的圆柱和圆锥高关系和底面积关系的认识，并从中总结了相关误差经验，学生在活动过程中，经历了从抽象认识图形与图形间特征与特征的关系到具体探究图形与图形间特征与特征的关系；再次，让学生经历借助假设验证猜想、探究图形与图形间特征与特征关系的过程，通过交流展示与数据分析，获得基本验证猜想，学生在活动过程中，再次经历了从抽象认识图形与图形间特征与特征的关系到具体探究图形与图形间特征与特征的关系，这一次学生准确的验证了猜想；最后，让学生借助已有知识经验进行公式关系探究，经历从具体关系模型向抽象关系模型的再次转换。

整个教学活动主要围绕关键问题“等体积等底面积的圆柱和圆锥高有怎样的关系？和等体积等高的圆柱和圆锥底面积有怎样的关系？”展开的，学生先后经历了观察、度量、计算、抽象等活动过程，并在活动中沿着发现-猜想-验证-抽象的认知链，自主建立起等体积等底面积和等体积等高圆柱和圆锥模型。

在数学学习中，吃“鱼”的确简单快捷，让学生轻松走上解决问题的捷径，但它消磨了学生的探索精神，而知“渔”虽然“道路艰辛”，“困难重重”，但却充满着未知与乐趣。数学学习的乐趣可能正如古人所云：“授人以鱼，不如授之以渔”。

## 参考文献

- [1] 中华人民共和国教育部.《义务教育数学课程标准(2022版)》(M).北京:北京师范大学出版社,2022.
  - [2] 张春莉,吴正宪.《读懂中小学生学习.错例分析》(M).北京:北京师范大学出版社,2015.
  - [3] 孙晓天,张丹.《义务教育数学课程标准(2022版)课例式解读》(M).北京:教育科学出版社,2022.
- 作者简介:李坤,男,1989.3.5,汉族,北京通州,一级教师,大学本科,研究方向:小学数学单元教学、作业设计。
- 韩莹,女,1990.6,汉族,北京市通州区,二级教师,本科,研究方向:小学数学。
- 张禹鑫,女,1996.9,汉族,北京通州,二级教师,大学本科,研究方向:小学数学单元教学、作业设计。
- 何思瑶,女,1993.10,汉族,北京市通州区,二级教师,本科,研究方向:小学数学教学、评价等教学研究。