

# 浅析不定方程在小学奥数中的应用

司姣姣 魏春强

(安康学院教育学院 陕西 安康 725000)

**[摘要]** 初等数论在培养人们思维能力的方面起着重要作用, 不定方程作为数论中重要内容之一, 在小学奥数中也有着广泛的应用. 文章结合具体题目, 从两个方面对不定方程在小学奥数中的应用做出分析.

**[关键词]** 数论; 不定方程; 小学奥数; 应用

初等数论是最古老的数学分支之一, 它研究整数的性质及其相互关系. 小学数学的研究对象就是整数, 小学奥数则是对小学数学的拓展与延伸, 它更多的强调解题的技巧性, 这与数论本身的特征完美的契合. 因此, 数论在小学奥数中有着不可撼动的地位. 不定方程作为数论中的分支之一, 在小学奥数中也有着广泛的应用. 在初等数论中, 就如何求解不定方程有如下定理:

定理1 二元一次不定方程 $ax+by=c$ 有整数解的必要且充分条件是 $d|c$ , 这里 $a, b$ 为大于零的整数,  $d=(a, b)$ .

定理2 如果 $x=x_0, y=y_0$ 是不定方程 $ax+by=c$ 的一个整数解, 那么它的一切整数解都可表示为:

$$\begin{cases} x=x_0+bt, \\ y=y_0-at. \end{cases} (t \text{ 为任意整数})$$

实际上, 一次不定方程的求解问题在理论上已经得到彻底地解决. 但限于小学生的思维特点和认知水平, 这些定理尚不能为其所用. 那么, 对于小学生而言, 该如何解决不定方程的问题呢?

通过研究发现, 小学奥数一般只涉及二元一次不定方程(组)及简单的三元一次不定方程(组)的有限正整数解的求法问题, 且常以填数、应用题(如“桶分液体”问题、“鸡兔同笼”问题、“百鸡问题”、行程问题……)的形式出现. 学生只需根据题中的等量关系, 列出相应的不定方程(组), 进而利用“观察法”或“穷举法”求解即可. 举例分析如下.

## 1、二元一次不定方程(组)在小学奥数中的应用

例1: 设 $A, B$ 都是正整数, 并且满足 $A/11+B/3=17/33$ , 求 $A+B$ 的值.

解: 等式两边同乘33, 可得:  $3A+11B=17$ , 观察可得一组正整数解:  $A=2, B=1$ .

所以,  $A+B=3$ .

例2: 某地电费按梯度收费, 不超过10度时, 每度0.45元. 超过10度时, 每度0.8元, 张家比李家多缴电费3.3元, 如果两家的用电量都是整数度, 问张家和李家各用电多少度?

分析: 若两家用电量都超过10度, 那么两家的用电量差 $=3.3/0.8$ , 显然不是整数.

若两家用电量都少于10度, 那么两家用电量差 $=3.3/0.45$ , 显然也不是整数. 因此只有一种情况, 即张家的用电度数超过10度, 李家的低于10度.

解法一: 设张、李两家的用电度数分别为 $x$ 和 $y$ . 于是有:  $4.5+(x-10) \times 0.8=0.45 \times y+3.3$ ; 其中 $x>10, y<10$ . 化简得:  $16x-9y=136$ . 用穷举法从11开始列举,  $x$ 分别取11, 12, 13, 14. 可得只有 $x=13, y=8$ 满足题意. 所以张家的用电量是13度, 李家是8度.

解法二: 设张家的用电量比10度多 $x$ 度, 李家的用电量比10度少 $y$ 度. 则有:  $0.8x+0.45y=3.3$ ; 化简得:  $16x+9y=66$ . 分别取1, 2, 3, 4. 可得只有 $x=3, y=2$ . 满足题意. 同样可知张家的用电量是13度, 李家的是8度.

例3: 某班级搞郊游活动, 需要6kg水, 老师拿来两只空桶, 一只可盛7kg水, 一只可盛5kg水, 他叫小明到水井里用这两只空桶去提水, 试问小明应该如何操作才能恰好得到6kg水.

分析: 由于一只桶可盛5kg水, 因此问题归结为如何利用这两只空桶得到1kg水. 即用7和5经过若干次加减运算后得到数1, 根据题意列出不定方程求解即可.

解: 设5升容器和7升容器的盛水次数分别设为 $x$ 和 $y$ . 由题得:  $5x-7y=1$ , 观察可得一组满足题意的解:  $x=3, y=2$ ; 即用5升的容器装4次, 从7升的容器倒出两次即可得到6kg水.

反思: 本题可列的方程有以下三种:  $5x+7y=1; 5x-7y=1; 7y-5x=1$ . 但限于小学生的知识体系和操作的简便程度, 一般用大容器来暂存溶液.

例4: 《孙子算经》中有如下问题: “今有雉兔同笼, 上有三十五头, 下

有九十四足, 问雉兔各几何?”

分析: “鸡兔同笼”问题的解法有许多种, 我们选用不定方程组来求解.

解: 设鸡有 $x$ 只, 兔有 $y$ 只, 根据题意可得:

$$\begin{cases} x+y=35 \\ 2x+4y=94. \end{cases}$$

消去 $y$ 可得:  $2x=46$

解得:  $x=23$ ; 所以, 鸡有23只, 兔有12只.

## 2、三元一次不定方程(组)在小学奥数中的应用

例1: 一个三位数除以19所得的商, 等于这三位数各数位上数字的和, 问这样的三位数有多少个?

解: 设该三位数的百位为 $a$ , 十位为 $b$ , 个位为 $c$ (其中 $a, b, c$ 均大于等于0小于等于9). 根据题意可得:  $19(a+b+c)=100a+10b+c$  化简得:  $9a-b-2c=0, 9a=b+2c \leq 9+2 \times 9=27$ . 所以 $a$ 可取1, 2, 3.

$a=1$ 时, 原式即为:  $b+2c=9$ , 取 $b=1, 3, 5, 7, 9$ ; 对应可得 $c=4, 3, 2, 1, 0$ .

$a=2$ 时, 原式即为:  $b+2c=18$ , 取 $b=0, 2, 4, 6, 8$ ; 对应可得 $c=9, 8, 7, 6, 5$ .

$a=3$ 时, 原式即为:  $b+2c=27$ , 可得:  $b=c=9$ .

即: 114, 133, 152, 171, 190, 209, 228, 247, 266, 285, 399均满足题意. 所以, 这样的三位数有11个.

例2: 我国古代数学家张丘建, 曾提出“百钱买百鸡”问题: “公鸡一只值钱5, 母鸡一只值钱3, 小鸡三只值钱1, 今有钱100, 买鸡100只, 问可买公鸡, 母鸡, 小鸡各几只?”

解: 设买公鸡 $x$ 只, 买母鸡 $y$ 只, 买小鸡 $z$ 只. 由题意可得:

$$\begin{cases} x+y+z=100 \\ 5x+3y+z/3=100. \end{cases}$$

消去 $z$ 并化简可得:  $7x+4y=100$ . 利用穷举法, 取 $x=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14$ . 可得三组符合题意的解:  $x=4, y=18, z=78$ 或 $x=8, y=11, z=81$ 或 $x=12, y=4, z=84$ ; 即有三种购买方案: ①买公鸡12只, 母鸡4只, 小鸡84只; ②买公鸡8只, 母鸡11只, 小鸡81只; ③买公鸡4只, 母鸡18只, 小鸡78只.

综上所述, 运用二元一次不定方程解应用题一般遵循“三步走原则”即可: 1. 根据题意, 列出等量关系式; 2. 确定解的条件; 3. 用“穷举法”或“观察尝试法”确定符合条件的解; 三元和多元不定方程(组)解法为: 根据已知条件消去一个未知数, 或确定一个未知数的值, 将其转化为二元求解.

文章对小学奥数中的几大类不定方程题型做了详细系统的总结. 这对于提高学生的解题能力是非常有益的.

## 参考文献

- [1] 陈肇曾. 数论初步. 北京: 高等教育出版社, 1996.3 (2017.8重印).
- [2] 张莉, 罗燕, 李永昌. “鸡兔同笼”问题的研究综述. 中国校外教育(下旬).
- [3] 北京书香教育. 不定方程与不定方程组及应用[小学奥数-SF坑班]新浪博客. 2013-09-17.

作者简介:

司姣姣, 女, (1998.11-) 汉族, 陕西省咸阳市乾县, 职称 就读于安康学院教育学院小学教育专业三年级学生, 学位, 本科

魏春强(1964.09), 男, 汉, 陕西省城固县, 安康学院, 副教授, 本科, 数学教育