

求解级数通项式心得

韩禾萱

(邯郸市第一中学 河北 邯郸 056000)

[摘要] 数列很抽象又具有很大的灵活性, 这便导致学生们学起来很吃力, 而求出其通项公式又是解决数列问题首要又是十分关键的一步。求通项公式也就是寻求数列第n项与其序号的关系, 其实高中时期的数列问题万变不离其宗, 只要对书上的定理充分理解, 自己能进行独立的推导, 记下经典例题的解决方法, 你就会发现很多题都有其相似之处, 那时你在看问题就会变得十分简单, 当然期间练习是少不了的。根据题目中条件灵活运用学习过的方法求数列的通项公式, 求解数列通项公式过程中方法的正确选择很重要与其他求解方法相比, 利用求函数的各阶导数, 并还原函数的方法, 求解级数通项式, 可以省略许多繁杂的计算, 节约大量时间。

[关键词] 差分法

在一次数学课外活动中, 老师给我们出了一道题, 题目是:
已知级数前6项是:

A1 A2 A3 A4 A5 A6 A7 A8
24 67 158 315 556 889 ? ?

- 1、请求出该级数的7、8两项, 即求出A7、A8;
- 2、该级数的自变量是自然数(1、2、3、4……), 而且A1项的自变量是1, A2项的自变量是2, 往后依次类推, 在此条件下, 请推解出该级数的通项式。

为求解这道题, 首先要了解一下级数通项式的意义、通项式和级数的关系以及题目中提到的自变量的含意。

级数通项式是级数中任意项的表达式, 我们用些实例来描述。

级数有很多类别, 常见的较简单的级数有等差级数、等比级数、自然数的平方、自然数的立方等构成的级数。级数中的任意项的表达式就是级数的通项式, 这些级数的通项式很简单, 举例说明。

以等差级数为例, 如等差级数: 1, 3, 5, 7, 9, ……它的通项式应该是 $Y=2x-1$ (x 在自然数1、2、3、4、5……中取值)。当 x 为1时, 该级数第一项是 $Y_1=2x-1=2-1=1$; 当 x 为2时, 该级数的第二项是 $Y_2=2x-1=4-1=3$ 。依此类推, $Y_3=2x-1=6-1=5$, $Y_4=2x-1=8-1=7$ ……

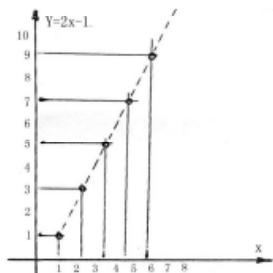
再以等比级数为例, 如等比级数: 1, 2, 4, 8, 16, ……它的通项式应该是 $Y=2^x(x-1)$ (x 仍在自然数1、2、3、4、5……中取值), 当 x 为1时, 该级数第一项是 $Y_1=2^1(x-1)=2^0=1$; 当 x 为2时, 该级数的第二项是 $Y_2=2^2(x-1)=2^1=2$; 当 x 为3时, $Y_3=2^3(x-1)=2^2=4$ 。依此类推, $Y_4=2^4(x-1)=2^3=8$, $Y_5=2^5(x-1)=2^4=16$ ……

自然数的平方组成的级数1, 4, 9, 16, 25, ……它的通项式为 $Y=x^2$ 。自然数的立方组成的级数1, 8, 27, 64, 125, ……它的通项式为 $Y=x^3$

由上分析可以看出, 级数的通项式 Y 是自变量 x 的函数, 可以用 $f(x)$ 来表示。上述四种级数的通项式分别是: $Y=f(x)=2x-1$; $Y=f(x)=2^x(x-1)$; $Y=f(x)=x^2$; $Y=f(x)=x^3$

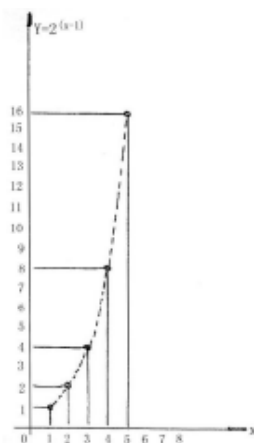
下面, 让我们在直角坐标中来认识一下通项式函数 $f(x)$ 和级数的关系。

以等差级1, 3, 5, 7, 9……为例, 它的通项式 $Y=f(x)=2x-1$, 在直角坐标中, 它的函数图如下:



在上图直角坐标中, 小圆圈代表级数的每个值, 即1, 3, 5, 7, 9, 虚线是 $f(x)=2x-1$ 的函数线。该级数的每个数值都在这条函数线上, 而且级数的任意项都在此函数线上。

再以等比级数1, 2, 4, 8, 16……为例, 它的通项式 $Y=f(x)=2^x(x-1)$, 在直角坐标中, 它的函数图如下:



在上图直角坐标中, 小圆圈代表级数的每个值, 即1, 2, 4, 8, 16, 虚线是 $f(x)=2^x(x-1)$ 的函数线, 该级数的每个数值都在这条函数线上, 而且级数的任意项都在此函数线上。

对于其他级数, 可以一一绘制出他们通项式的函数线, 通项式的函数线是连续的, 级数是不连续的。在任意情况下, 级数的数值都会与该级数的通项式函数线重合。

了解了级数通项式的含意后, 我们来求解本题。

先来求解该级数的第七、八项, 即求解A7, A8。

下面的解题方法是笔者在多次计算本类型题目时积累的经验, 笔者将其定名为差分法, 具体操作如下:

第一步: 列表, 即列出该级数, 可称为级数数列。	A ₁	A ₂	A ₃	A ₄	A ₅	A ₆	A ₇	A ₈
	24	67	158	315	556	889	(1362)	(1963)
第二步: 求出相邻两项差, 并填写在该两项下方, 形成第一次差分数列		43	91	157	241	343	(463)	(601)
第三步: 将第一次差分数列按上述方法再差分, 得出第二次差分数列			48	66	84	102	(120)	(138)
第四步: 将第二次差分数列再差分, 得出第三次差分数列				18	18	18	(18)	(18)

第五步: 第三次差分数为常数18, 停止继续差分, 同时第三次差分数列可以延长, 即如表格所示(18)(18)。按差分程序反推, 求出第二次差分数列可延长为(120)(138)(即 $102+18=120$, $120+18=138$); 第一次差分数列延长为(463)

(下转第342页)

与活动和比赛,不仅丰富了校园文化,增强了学生素质,同时也增进了教师、家长及孩子间的感情,提高了班级的凝聚力。

3.积极开展“家长资源进校园”特色活动。

学校每学期都举行一次“家长资源进校园”活动,来自多个行业和部门的家长齐聚校园,围绕自己的职业特点为学生进行多种形式的知识讲座。活动中学生兴高采烈,因为家长们带来了课本上没有的知识;同时又幸福满满,因为是以不同于家庭的方式和父母在一起参加活动,还会收到家长的小礼物,自然轻松愉悦。开展这样的活动,家长精心准备、大力支持,学生兴致勃勃参与,在很大程度上促进了家校教育协作,大家齐心协力、同心同德,为学生快乐学习加油助威。

4.以班级为活动,组织家长和周末开展“户外亲子拓展”活动。

亲子之间,最需要的是陪伴。我们借助户外拓展训练,家长和孩子共同参与活动,在家长陪伴的美好时光中,通过交互的、对话的、生活化的、感性的活动方式,让家长获得真实体验,反思自己的行为,达到调整家长教育理念的目的。提高孩子的心理素质,让孩子建立积极良好的心态,加强孩子之间彼此的了解和沟通,培养集体主义品质,形成优秀的团队合作精神,磨练孩子意志,加强纪律性。启发孩子创新意识和转变思维的技巧,真正以团队为核心,将拓展心得转化到孩子的实际生活中,使之产生真正的成长与转变。树立共同的目标、责任感、归属感,形成积极主动、互助的团队气氛。

5.开展“书香家庭亲子共读”的阅读活动,努力创建“书香家庭”,为孩子营造良好的学习氛围。

通过阅读活动,在家庭形成良好的读书氛围,既增进了家庭

成员间的感情,又营造了和谐家庭、书香家庭,提升家庭成员文化素养。

6.“小手拉大手”走进社区实践活动。

利用家长的资源,让家长们和孩子们一起,亲进社会、学习知识、开阔眼界;提高学生自身的综合素质,增强学生的学习意识和吃苦耐劳精神;提高学生独立生活能力,培养学生的实践体验能力和团队协作精神;如果走入的是家长的工作岗位,孩子们通过体验还能体会到家长工作的辛苦,学会体谅父母。

7.“优秀家长评选”活动。

每学期,以班级为单位,组织评选优秀家长。学校进行表彰。通过这一活动的开展,在全校营造真正关注孩子健康成长、快乐成长的良好氛围,引领广大家长转变家庭教育观念,掌握科学有效的教育方法,在家庭和教育机构间架设起沟通交流的桥梁,推动全校素质教育工作健康发展,让广大学生真正成为家庭教育和学校教育的受益者。

结束语

综上所述,家校合力,协同教育才能促进学生健康快乐地成长。家庭是孩子的终身学校,家长是孩子的第一任老师,教育孩子健康成长,是家长和教育工作者共同的职责。“办好教育,学校、家庭、政府、社会都有责任。”这是习总书记在2018年全国教育大会上的重要指示。家校合力,就像两只有力的翅膀,用爱将孩子簇拥在一起,共同伴随着孩子们健康的成长。我们深信,只有家校合力,才能促进学生发展,协同教育才能谱出新的篇章。

参考文献

[1]朱梅芳.家校形成“教育合力”促孩子健康发展[J].华夏教师,2018(18):90-91.

(上接第318页)

(601),按同理可延长级数数列为(1362)(1963);到此为止,已求出本级数的第七、八项,即 $A_7=1362$, $A_8=1963$ 。按照本差分法,还可以求出该级数的任意项 A_n 的数值。

下面求解本题的第二个问题,即求出该级数的通项式。

我们从函数导数的定义中可以确定,级数差分与函数的导数是对应的。导数的定义是相邻两点的函数值之差除以该两点自变量之差所得的商值。而级数的差分也是相邻两级数之差除以该两点自变量之差(在本两点的自变量之差为1)的商值。

从前面的推算中可得知,该级数第三次差分后得出的第三次差分数列为常数18,说明该级数的通项式函数 $f(x)$ 的三阶导数为常数18,则 $f(x)$ 的自变量最高幂次是3,即 x^3 ; $f(x)$ 的二阶导数应该含有某一次项,这个一次项以18还原而求得,它是 $18x$, $f(x)$ 的一阶导数应该含有某二次项,这个二次项以 $18x$ 还原而求得,它是 $9x^2$, $f(x)$ 本身应该含有一个三次项,该三次项以 $9x^2$ 还原而求得,它是 $3x^3$ 。 $3x^3$ 已达到最高幂次3,就不需要再还原了,而且可以确定该通项式 $f(x)$ 最高幂次项是 $3x^3$ 。

如何求得 $f(x)$ 除 $3x^3$ 外的剩余部分?我们可以将该级数中每项均减去 $3x^3$,将构成一个新的级数,我们简称为级数B。

现求出相应的 $3x^3$

x 1 2 3 4 5 6

$3x^3$ 3 24 81 192 375 648

在原级数中减去 $3x^3$

原级数 24 67 158 315 556 899

$3x^3$ 3 24 81 192 375 648

相减后 21 43 77 123 181 251

相减后的级数就是级数B,该级数的通项式 $f_B(x)$ 是一个自变量 x 最高幂次为2的函数。现将级数B差分如下:

21 43 77 123 181 251

22 34 46 58 70

12 12 12 12

差分两次后出现的差分数列为常数12,按前述方法,将12还原。这样就求得通项式 $f(x)$ 中的二次项是 $6x^2$,在级数B中减去 $6x^2$

21 43 77 123 181 251

$6x^2$ 6 24 54 96 150 216

相减 15 19 23 27 31 35

相减后的级数暂称为级数C

将级数C差分

15 19 23 27 31 35

4 4 4 4 4

按前述方法将4还原,这样就求得通项式 $f(x)$ 中的一次项为 $4x$,仍按上述方法可求得 $f(x)$ 中的0次项是11。综前述,本级数的通项式为 $f(x)=3x^3+6x^2+4x+11$ 。将自变量 x 取值1、2、3、4、5、6、7、8代入本通项式,可得出级数的前8项为:

A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6 A_7 A_8

24 67 158 315 556 889 1362 1963

验证无误,本题解答完毕。

参考文献

[1]郁祖权.中国古算解趣 科学出版社(ISBN 978-7-03-014240-5)2004年10月第一版

[2]邓小荣.高中数学的体验教学法[J].广西师范学院学报,2003(8)

[3]黄红.浅谈高中数学概念的教学方法[J].广西右江民族师专学报,2003(6)

[4]胡中双.浅谈高中数学教学中创造性思维能力的培养[J].湖南教育学院学报,2001(7)