

例析高考数学中导数的应用

谢 兴

(威宁县大街中学 贵州 毕节 553111)

[摘要] 导数是高考考察的重点,在高考数学中占有很大比重,主要考察导数的应用。由于对导数基础知识及应用的掌握不到位,丢分严重。通过例析近年高考题,分析考点总结方法,便于在教学过程中培养学生学习数学的兴趣提高学生分析问题和解决问题的能力。

[关键词] 导数;高考;方法

0 引言

导数是高中数学重要内容之一,是解决函数、不等式恒成立等问题的有力工具。近年来导数也是高考考察重点,主要考察导数的几何意义、利用导数解决函数的极值最值,函数的单调性,函数根的存在性问题、利用导数证明不等式恒成立问题。

1 对导数几何意义的考察

例1(2018)曲线 $f(x)=2\ln(x+1)$ 在点(0,0)处的切线方程为_____。

解析:要求切线方程,只需求出切线的斜率,有导数的几何意义知方程在(0,0)的斜率为 $k=f'(0)$,而 $f'(x)=\frac{2}{x+1}$,

$$\text{所以 } k = f'(x)|_{x=0} = \frac{2}{x+1}|_{x=0} = 2,$$

设切线的方程为 $y=kx+b$,将(0,0)及 $k=2$ 代入切线方程得到 $y=2x$ 。

例2(2018)曲线 $f(x)=(ax+1)e^x$ 在点(0,1)处的切线的斜率为-2,则 $a=$ _____。

解析:由导数的几何意义知 $f'(x)=(ax+a+1)e^x$,所以曲线在点(0,1)的切线斜率为 $k=f'(x)|_{x=0}=(a+1)=-2$,解得 $a=-3$ 。

总结:此类考题属于基础题,主要考察了导数的几何意义,即函数 $f(x)$ 在某点 M 处切线的斜率 k ,考察了导数对基础知识的掌握。

2 导数的应用

2.1 利用导数求函数的极值

例3(2017)若 $x=-2$ 是函数 $f(x)=(x^2+ax-1)e^{x-1}$ 的极值点,则 $f(x)$ 的极小值为()

A.-1 B. $-2e^{-3}$ C. $5e^{-3}$ D.1

解析:因为 $x=-2$ 是函数 $f(x)$ 的极值点,所以有 $f'(-2)=0$,而 $f'(x)=[x^2+(a+2)x+a+1]e^{x-1}$,求出 $a=-1$ 。令 $f'(x)=0$ 解得 $x_1=-2, x_2=1$,判断 $f(x)$ 在 $x_1=-2, x_2=1$ 左右的符号, $f'(x)$ 在 $(-\infty, -2)$ 符号为正 $f(x)$ 为单调递增函数, $f'(x)$ 在 $(-2, 1)$ 符号为负 $f(x)$ 为单调递减函数, $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 符号为正 $f(x)$ 为单调递增函数,所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极小值,即 $f(1)=-1$ 。

总结:本题主要考察了利用导数求函数极值,难度系数不大,解题的思路:①求导函数 $f'(x)$;②令 $f'(x)=0$ 求出实数根;③判断 $f(x)$ 在 $f'(x)=0$ 的根左右的符号;④根据结论写出极值。

2.2 利用导数求函数的单调区间

例4(2017)已知函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-a(x^2+x+1)$ 。

(1)若 $a=3$,求 $f(x)$ 的单调区间;

解析:因为 $f(x)$ 的定义域为 R ,当 $a=3$ 时, $f'(x)=x^2-6x-3$,令 $f'(x)>0$ 解得 $x<3-2\sqrt{3}$ 或 $x>3+2\sqrt{3}$,所以 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, 3-2\sqrt{3})$ 和区间 $(3+2\sqrt{3}, +\infty)$ 上单调递增,在区间 $(3-2\sqrt{3}, 3+2\sqrt{3})$ 上单调递减。

总结:本题主要考察利用导数求函数的单调性,难度适中,对于这类题①求导函数 $f'(x)$;②令 $f'(x)>0$ 求出函数递增区间;令 $f'(x)<0$ 求出函数递减区间。

2.3 利用导数证明不等式

例5(2018)已知函 $f(x)=(2+x+ax^2)\ln(1+x)-2x$ 。

(1)若 $a=0$,证明:当 $-1<x<0$ 时, $f(x)<0$;当 $x>0$ 时, $f(x)>0$;

解析:由题设知函数 $f(x)$ 的定义域为 $x>-1$,当 $a=0$ 时,

$$f(x)=(2+x)\ln(1+x)-2x, \text{ 所以 } f'(x)=\ln(1+x)+\frac{1}{x+1}-1, \\ \text{令 } h(x)=f'(x), \text{ 则 } h'(x)=-\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{x+1}, \text{ 再令 } h'(x)\geq 0 \text{ 解}$$

得 $x\geq 0$,所以有 $f'(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 单调递增,在区间 $(-1, 0)$ 上单调递减。当 $x=0$ 时, $f'(x)=0$,所以 $f'(x)\geq 0$ 恒成立,所以 $f(x)$ 在 $(-1, +\infty)$ 上单调递增,又 $f(0)=0$,故当 $-1<x<0$ 时, $f(x)<0$;当 $x>0$ 时, $f(x)>0$ 。

例6(2018)已知函数 $f(x)=\frac{ax^2+x-1}{e^x}$

(2)证明:当 $a\geq 1$ 时, $f(x)+e\geq 0$ 。

解析:当 $a\geq 1$ 时, $f(x)+e\geq \frac{x^2+x-1}{e^x}+e=e^{-x}(x^2+x-1+e^{x+1})$,令 $g(x)\geq x^2+x-1+e^{x+1}$,则有 $g'(x)\geq 2x+1+e^{x+1}$,当 $x<-1$ 时, $g'(x)<0$, $g(x)$ 单调递减;当 $x>-1$, $g'(x)>0$, $g(x)$ 单调递增,又 $g(x)\geq g(-1)=0$,所以 $f(x)+e\geq 0$ 。

2.4 利用导数解决最值问题

例7(2018)已知函 $f(x)=(2+x+ax^2)\ln(1+x)-2x$ 。

(2)若 $x=0$ 是 $f(x)$ 的最大值点,求 a 。

解析:函数 $f(x)$ 的定义域为 $x>-1$,

$$f'(x)=(1+2ax)\ln(1+x)+\frac{ax^2-x}{1+x},$$

$$\text{所以 } f''(x)=2a\ln(1+x)+\frac{3ax^2+4ax+x}{(1+x)^2}, \text{ 令 } f''(x)\leq 0,$$

$$\text{则有 } 2a\ln(1+x)+\frac{3ax^2+4ax+x}{(1+x)^2}\leq 0,$$

$$\text{化解得 } a[2(1+x)^2\ln(1+x)+3x^2+4x]\leq -x,$$

$$\text{令 } g(x)=2(1+x)^2\ln(1+x)+3x^2+4x$$

$$\text{则 } g'(x)=4(1+x)\ln(1+x)+2(1+x)+6x+4, \text{ 又 } g'(0)=6,$$

$g(0)=0$ 所以当 $x>0$ 时, $g(x)>0$;当 $x<0$ 时, $g(x)<0$;所以

①当 $x>0$ 时:

$$a\leq \frac{-x}{2(1+x)^2\ln(1+x)+3x^2+4x},$$

故

$$a\leq \lim_{x\rightarrow 0} \frac{-x}{2(1+x)^2\ln(1+x)+3x^2+4x} = -\frac{1}{6},$$

②当 $x<0$ 时:

$$a\geq \frac{-x}{2(1+x)^2\ln(1+x)+3x^2+4x},$$

(下转第703页)

生：不会，还是很愤怒。

师：那你觉得要怎样才能平息你心中的愤怒？（第五次追问）

生：把属于我们中国人的尊严夺回来，不要在外国人面前丢脸。

师：尊严要怎样才有？（第六次追问）

生：我们中国要强大起来。

师：很好。同学们，我们要记住：记住140多年前的这场噩梦，记住残垣断壁上的耻辱，记住落后就要挨打的教训。我们要努力学好知识，将来靠我们的知识、智慧、以及属于我们中国人的自尊屹立于世界。让我们为祖国贡献属于自己的一份力量，让这个历史悲剧不再重演，让我们

“勿忘国耻，振兴中华”（课件展示，学生齐读）

设计思路：激起学生心中的愤怒，抓住学生心中的所感，是本次追问环节的基本思路。学生在前面一系列的层层铺垫中，心中积压着许多感想，此时，让学生练笔并且表达出来。而在其中的不断追问，恰到好处的让学生在理解本文的基础上，提升了理解

的境界，更重要的是学生在不断地追问下，思想感情的一次次爆发，爱国情感的一次次提升。总的来说，本节课学生思维活跃，情感激昂，达到了预期教学的效果。

点击智慧：好的课堂教学效果体现，充分显露出教师的课堂提问艺术。而在提问过程中，精心设计卓有成效的追问环节，是在思想碰撞中建高效课堂和的根本保证。我紧紧抓住学生心那股劲，那快要喷发的怒火。把课文的主题升华到爱国主义教育是比较抽象的难题，把课文与学生的情感融合在一起，设计巧妙的追问环节，激发学生的爱国情怀。不但让学生理解课文深刻，更重要的是对祖国有更加深厚的情感。

在小学语文教学中，追问是一种艺术，它需要教师根据课堂的动态发展，发挥教学智慧，进行恰当的问题引领，在关键点追问，实现课堂的高效化。

参考文献

- [1]叶澜.《让课堂焕发出生命的活力》教育研究1997年第9期
[2]章建跃.《中学教学概论》北京大学出版社2008
[3]金传宝.《教师如何提高发问技巧》外国教学研究1998

（上接第701页）

（小组合作讲故事并展示）

师：谁能够挑战一下自己，一个人担任所有的角色，把这个故事讲好。

在课堂的最后一个板块中，设计相应的教学策略，让孩子先观看同伴讲故事的视频，并用课堂上学到的方法进行点评，在点评后抓住要点，进行小组合作讲故事。这样的要求分别对不同的学生提出不同的任务提示，帮助学生边倾听边对照，用于自我提醒及整体提升。孩子们饶有趣味，参与度高，在学生展示讲故事的环节，让学生戴上头饰，大家沉浸其中，关注到了声音、表情、动作，表演必回惟妙惟肖，学生言语实践生机蓬勃发展。

结束语

《听故事 讲故事》的主题表达的尝试，促进了学生的言语

发展，实现了由阅读本位向表达本位的超越。主题学习与言语实践观照下的语文教学，要钻研文本，搜寻文本之间蕴藏的语言因素。要研究学生，尊重学生的学习起点，搭建立体丰富的听说读写思的言语实践平台。让学生在富有情意的言语实践活动中，唤起言语欲望，切实发展言语能力。言语实践，理应成为语文教学自觉的行走方式。

参考文献

- [1]陆华山.言语实践：语文教学的自赎与新生[J]江苏教育研究，2011（10A）
[2]潘新和.语文：表现与存在[M].福州：福建人民出版社，2004.204—206.[3]曹明海.语文教学本体论[M].济南：山东人民出版社，2007.222—224.414.

（上接第685页）

故

$$a \geq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{2(1+x)^2 \ln(1+x) + 3x^2 + 4x} = -\frac{1}{6},$$

综上所述 $a = -\frac{1}{6}$.

总结：本道题主要考察利用导数解决函数最值，难度较大属于压轴题，大部分学生只能完成第一问，在学习过程中要注重基础知识的学习，理解转化的数学思想。

结束语

导数的应用很广，利用导数可以解决函数、不等式等问题。从近年的高考题来看命题方向明确，难度层次清晰，主要考察学生对导数基础知识和导数应用的掌握，导数知识出现在选择题和填空题难度适中，大题部分几乎是压轴题难度系数较大，失分率较高。通过例举近年的高考题总结求解导数题的思路方法，在教学过程中要注重基础知识的教授。

参考文献

- [1]王春扬.导数的应用[J].高中数学教与学，2005：19-20.
[2]周学勤.例说导数的应用[J].牡丹江教育学院学报，2009（4）：109-110.