求函数的值域方法种种

李宝贤

（甘肃省合水县肖咀初中　甘肃　庆阳　745408）

[摘　要] 函数的值域在函数的应用中占有非常重要的地位.因此，准确选择恰当的方法显得十分重要.本文结合具体的例题说明了求函数值域的方法.

[关键词] 函数；值域；方法

0 引言

函数的值域在函数的应用中占有非常重要的地位.近年来的高考题中，一般不直接考查函数的值域，往往作为综合题的一部分来考查.而求函数的值域是一个比较复杂的问题.因此，准确选择恰当的方法显得十分重要.下面举例说明求函数值域的方法，供参考。

1 直接法

有点函数结构并不复杂，可以通过基本初等函数的值域及不等式性质直接观察得出函数的值域.

例1：求函数$y=\frac{1}{x^2+2}$的值域

解：$\because x^2\geq 0\ \therefore x^2+2\geq 2$

$\therefore 0<\frac{1}{x^2+2}\leq\frac{1}{2}$，即$0<y\leq\frac{1}{2}$

$\therefore$函数$y=\frac{1}{x^2+2}$的值域为$\left\{y\mid 0<y\leq\frac{1}{2}\right\}$

2 中间变量法

对于一些特殊的函数，通过一定的变换，借助于中间变量的范围来达到求原函数的值域。

例2：求函数$y=\frac{10^x+10^{-x}}{10^x-10^{-x}}(x\neq 0)$的值域

解：$\because y=\frac{10^x+10^{-x}}{10^x-10^{-x}}=\frac{10^{2x}+1}{10^{2x}-1}(x\neq 0)$，

$\therefore 10^{2x}=\frac{y+1}{y-1}(y\neq 1)$

又$\because x\neq 0$，$\therefore 10^{2x}>0$且$10^{2x}\neq 1$，$\therefore\frac{y+1}{y-1}>0$，$\therefore y<-1$或$y>1$

$\therefore$函数的值域为$\{y\mid y<-1$或$y>1\}$

3 换元法

运用代数或者三角代换，将所给函数转化成值域容易确定的另一函数，从而求得原函数的值域.形如$y=ax+b\pm\sqrt{cx+d}$（a，b，c，d均为常数，且ac≠0）的函数常用此法求值域

例3：求函数$y=x+\sqrt{x-1}$的值域

解：令$t=\sqrt{x-1}$，则$x=t^2+1,t\geq 0$，$y=t^2+t+1=(t+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}$

$\because t\geq 0$，　$\therefore$函数在[0，+∝）上是增函数

$\therefore$当$t=0$即$x=1$时，$y_{\min}=1$，无最大值. $\therefore$所求函数的值域为[1，+∝）

例4：求函数$y=x+\sqrt{1-x^2}$的值域

解：$\because$函数的定义域为$\{x\mid -1\leq x\leq 1\}$

$\therefore$令 x=sinθ，$-\frac{\pi}{2}\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$.　则$y=\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin(\theta+\frac{\pi}{4})$

$\because -\frac{\pi}{2}\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$，　$\therefore -\frac{\pi}{4}\leq\theta+\frac{\pi}{4}\leq\frac{3\pi}{4}$

$\therefore -\frac{\sqrt{2}}{2}\leq\sin(\theta+\frac{\pi}{4})\leq 1$，$-1\leq\sqrt{2}\sin(\theta+\frac{\pi}{4})\leq\sqrt{2}$.即$-1\leq y\leq\sqrt{2}$

$\therefore$所求函数的值域为$\{y\mid -1\leq y\leq\sqrt{2}\}$.

4 配方法

对于二次函数或可化为形如$F(x)=af^2(x)+bf(x)+c$的函数值域问题，均可用配方法.用此法求函数值域一定要注意定义域.

例5：已知$2\alpha+\beta=\pi$，求函数$y=\cos\beta-6\sin\alpha$的值域

解：$\because 2\alpha+\beta=\pi$，$\therefore\beta=\pi-2\alpha$.

$\therefore y=\cos(\pi-2\alpha)-6\sin\alpha=-\cos 2\alpha-6\sin\alpha$

$=2\sin^2\alpha-6\sin\alpha-1=2(\sin\alpha-\frac{3}{2})^2-\frac{11}{2}$

$\because -1\leq\sin\alpha\leq 1$. $\therefore$当$\sin\alpha=-1$时，$y_{max}=7$，当$\sin\alpha=1$时，$y_{\min}=-5$

$\therefore$所求函数的值域为[−5，7]

5 不等式法求值域：利用均值不等式$a+b\geq 2\sqrt{ab}$

例6：求函数$y=1-2x-\frac{3}{x}$的值域

解：$\because$函数的定义域为$\{x\mid x\neq 0\}$.$\therefore$当$x>0$时，

$y=1-2x-\frac{3}{x}=1-(2x+\frac{3}{x})\leq 1-2\sqrt{6}$

当$x<0$时，

$y=1-2x-\frac{3}{x}=1+(-2x)+(-\frac{3}{x})\geq 1+2\sqrt{(-2x)(-\frac{3}{x})}=1+2\sqrt{6}$

$\therefore$原函数的值域为$\{y\mid y\leq 1-2\sqrt{6}$或$y\geq 1+2\sqrt{6}\}$

6 判别式法求值域

把函数转化成x关于的二次方程$F(x,y)=0$，通过方程有实根，判别式△≥0，从而求得原函数的值域.形如$y=\frac{a_1x^2+b_1x+c_1}{a_2x^2+b_2x+c_2}$（$a_1,a_2$不同时为0）的函数的值域常用此法.

例7：求函数$y=\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$的值域

解：此函数的定义域为R，由$y=\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$

得$(y-1)x^2+(y+1)x+(y-1)=0$

①当$y=1$时，$x=0$，$0\in R$符合题意

②当$y\neq 1$时，$\triangle=(y+1)^2-4(y-1)\geq 0$.$\therefore\frac{1}{3}\leq y\leq 3$　$y\neq 1$

综上所述，原函数的值域为$[\frac{1}{3},3]$

7 利用函数的单调性求值域

确定函数在定义域（或某个定义域的子集上）的单调性求出函数的值域的方法称为单调性法.常见的有二次函数在某个区间上求值域，对号函数[$f(x)=x+\frac{k}{x}(k>0)$]在某个区间上求值域，在利用重要不等式求值域失效（符号不满足）的情况下，可采用单调性求值域。

例8：求函数$y=\sqrt{4x^2+5}+\frac{4}{\sqrt{4x^2+5}}$的值域

错解：$\because\sqrt{4x^2+5}>0$.$\therefore$有均值不等式

$y=\sqrt{4x^2+5}+\frac{4}{\sqrt{4x^2+5}}\geq 2\sqrt{\sqrt{4x^2+5}\cdot\frac{4}{\sqrt{4x^2+5}}}=4$

$\therefore y\geq 4$，$\therefore$ 函数的值域为 $\{y\mid y\geq 4\}$

错因：利用均值不等式时，一定要注意条件“一正二定三相等”，而此题不满足均值不等式的条件，等号不能成立（$\because$ 当 $\sqrt{4x^2+5}=\frac{4}{\sqrt{4x^2+5}}$ 时. $4x^2+5=4$，$x^2=-\frac{1}{4}$）

正解：令 $t=\sqrt{4x^2+5}\geq\sqrt{5}$，则 $y=t+\frac{1}{t}\ (t\geq\sqrt{5})$，

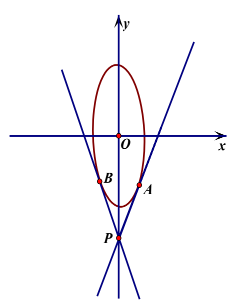
由 $y=t+\frac{1}{t}$ 在 $[\sqrt{5},+\infty)$ 上单调递增

$\therefore$ 当 $t=\sqrt{5}$ 即 $x=0$ 时，$y_{\min}=\frac{9\sqrt{5}}{5}$，$\therefore$ 函数的值域为 $[\frac{9\sqrt{5}}{5},+\infty)$

8 数形结合法求值域

数形结合法就是利用函数所表示的几何意义，借助于几何方法或图像来求函数的值域。

例9：已知实数x，y满足 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$，求 $u=\frac{y+4}{x}$ 的取值范围



解：将 $u=\frac{y+4}{x}$ 看成椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ 上的动点（x，y）与定点P（0，—4）的连线的斜率，过点P引椭圆的两条切线PA，PB，设切线方程为y=kx-4，如右图所示

由 $\begin{cases} y=kx-4 \\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1 \end{cases}$ 得 $(4k^2+9)x^2-32kx+28=0$，

则 $\triangle=(-32k)^2-4\times 28(4k^2+9)=0$

$\therefore k=\pm\frac{\sqrt{7}}{2}$，$\therefore k_{PA}=\frac{\sqrt{7}}{2}$，$k_{PB}=-\frac{\sqrt{7}}{2}$，

$\therefore$ 所求函数的值域为 $(-\infty,-\frac{\sqrt{7}}{2}]\cup[\frac{\sqrt{7}}{2},+\infty)$

9 函数的有界性求值域

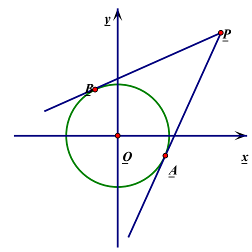
形如 $y=\frac{c\cos x+d}{a\cos x+b}$（或 $y=\frac{c\sin x+d}{a\sin x+b}$ 或 $y=\frac{c\sin x+d}{a\cos x+b}$）型函数常用此法.

例10：求函数 $y=\frac{2-\sin x}{2-\cos x}$ 的值域

解：原函数可变形为 $\sin x-y\cos x=2-y$，即 $\sin(x-\varphi)=\frac{2-y}{\sqrt{1+y^2}}$

$\because |\sin(x-\varphi)|\leq 1$，$\therefore \frac{|2-y|}{\sqrt{1+y^2}}\leq 1$，$3y^2-8y+3\leq 0$

$\therefore \frac{4-\sqrt{7}}{3}\leq y\leq\frac{4+\sqrt{7}}{3}$ $\therefore$ 所求函数的值域为 $[\frac{4-\sqrt{7}}{3},\frac{4+\sqrt{7}}{3}]$



此题还可以看成是过定点P（2，2）和圆 $x^2+y^2=1$ 上一点的直线斜率，应用数形结合法，如右图

10 导数法：多项式函数在闭区间上求值域多用此法

例11：求函数 $f(x)=x^3-x^2-x+1$ 在区间 $[-1,2]$ 的值域

解：$\because f'(x)=3x^2-2x-1=(3x+1)(x-1)$

令 $f'(x)=0$ 得 $x_1=-\frac{1}{3},x_2=1$ 当 $-1<x<-\frac{1}{3}$ 时，

$f'(x)>0$，$f(x)$ 为增函数，当 $-\frac{1}{3}<x<1$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 为减函数，当 $1<x<2$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 为增函数

$\therefore f(x)$ 在 $x=-\frac{1}{3}$ 处取得极大值，在 $x=1$ 处取得极小值

而 $f(-1)=0$，$f(-\frac{1}{3})=\frac{32}{27}$，$f(1)=0\frac{32}{27}$，$f(2)=3$

$\therefore$，$f(x)_{max}=3$

$\therefore$ 函数 $f(x)=x^3-x^2-x+1$ 在区间 $[-1,2]$ 的值域为 $[0,3]$

参考文献

[1]高永亮.函数值域的求法分类例析[J].中学数学，2018（19）：58-59.

[2]张新秀.浅谈求函数最值的方法[J].数学学习与研究，2017（15）：144.

（上接第564页）

阅读如充满魔力的微笑，唤醒麻木的心。孩子们带着热情，很快写出一篇篇各具特色的习作。有孩子这样写：

小熊敲门，我也敲门
我想敲开教堂的门，
学习上帝的话语，做上帝所喜悦的事情，
带领更多人认识上帝，相信上帝，跟随上帝。
我想敲开军事基地的门，
学习开枪、射击等各种本领，
保卫国家的安全，人民的平安。

借着阅读，激发孩子对生活的热爱；借着创意写作，鼓励孩子大胆敲“美好事物的门”。不断带领孩子阅读，让书本不断敲开孩子的心门，让孩子不断有热情敲开梦想之门。

结论

阅读后开展创意写作，不仅能提高孩子的说话写话能力，还能引导孩子让阅读和生活发生密切链接；能引领孩子认真观察生活、体味生活、书写生活；能让书中各样的智慧启迪孩子有智慧地生活；能鼓励孩子勇于追求自己的梦想。

参考文献

[1]叶圣陶著，《好读书而求甚解——叶圣陶谈阅读》，开明出版社。