

再谈中学数学公式教学

周启恒

(重庆市开州区职业教育中心 重庆 405400)

[摘要] 本文从中学数学公式教学入手, 强化公式成立的条件, 注重公式的逆用, 深化公式的变形应用, 这样, 学生就能掌握并灵活应用公式。

[关键词] 数学公式; 灵活应用

数学公式是数学教学中重要的部分, 是解题的依据, 只有熟练地掌握了公式, 才能灵活地运用于解题。由于数学教材的篇幅、内容及时间的限制, 因而数学公式的教学空间非常大, 更显重要。

一、强化公式成立的条件

很多数学公式成立是有重要条件的, 当不具备重要条件时, 便不能应用公式, 学生往往忽视公式中的条件, 因而在解题中往往失误。在教学中, 教师必须强化公式成立的条件, 反复训练。

对于均值定理: $a > 0, b > 0$, 则 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ (等号成立当且仅当 $a=b$);

当 ab 是常数, $a=b$ 时, $a+b$ 取得最小值;

当 $a+b$ 是常数, $a=b$ 时, ab 取得最大值。

$a > 0, b > 0$, 这个条件会引起学生注意, 而公式中“=”成立的条件往往被忽视, 因此, 在教学中必须强化训练。

例: 已知: $x \in (0, \frac{\pi}{2}]$, 求 $\frac{\sin x}{2} + \frac{2}{\sin x}$ 的最小值。

解: $\because x \in (0, \frac{\pi}{2}]$, 则 $\sin x \in (0, 1]$, 由均值定理,

$$\text{有 } \frac{\sin x}{2} + \frac{2}{\sin x} \geq 2\sqrt{\frac{\sin x}{2} \times \frac{2}{\sin x}} = 2$$

$\therefore \frac{\sin x}{2} + \frac{2}{\sin x}$ 的最小值是 2。

点拨: 此题学生便忽略了“=”成立的条件, 实际上, 只有当 $\frac{\sin x}{2} = \frac{2}{\sin x}$, 即 $\sin x = 2$, 等号成立, 而 $|\sin x| \leq 1$, 所以 $\sin x$ 的值不可能等于 2。

$$\text{对于等比数列前 } n \text{ 项和公式 } S_n = \begin{cases} na_1 & (q = 1 \text{ 时}) \\ \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} & (q \neq 1 \text{ 时}) \end{cases}$$

用公式前必须对 $q=1$ 或 $q \neq 1$ 做出判断, 特别是公比 q 用字母表示时, 更要引起高度注意。

例: 求等比数列 $\frac{1}{y}, \frac{1}{y^2}, \frac{1}{y^3}, \dots$ ($y \neq 0$) 的前 n 项和。

解: $\because a_1 = \frac{1}{y}, q = \frac{1}{y}$

$$\therefore S_n = \frac{\frac{1}{y} \left[1 - \left(\frac{1}{y}\right)^n \right]}{1 - \frac{1}{y}} = \frac{y^n - 1}{y^{n+1} - y^n}$$

点拨: 此题学生忽略了等比数列前 n 项和公式中 q 的条件, 求解此题应分 $y=1$ 和 $y \neq 1$ 两种情况。

诸如此类的公式还有很多, 教师在讲解数学公式时, 必须强化公式中的条件, 引起学生的高度重视, 从而在解题中少出或不出错误。

二、注重公式的逆用

数学公式往往有两个方面的应用——正向应用与逆向应用。

在讲了两个角和与差的三角公式后, 可精选部分习题供学生逆向练习。

例: 计算或化简

$$1. \cos 85^\circ \cdot \cos 15^\circ - \sin 265^\circ \cdot \sin 15^\circ$$

$$2. \sin 7^\circ \cdot \cos 37^\circ - \sin 83^\circ \cdot \cos 307^\circ$$

$$3. \frac{\tan 10^\circ + \tan 20^\circ}{1 - \tan 10^\circ \tan 20^\circ}$$

$$4. \frac{1 - \tan 15^\circ}{1 + \tan 15^\circ}$$

例: 求证 $\frac{1}{2} \cos a + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin a = \cos(60^\circ - a)$

三、深化公式的变形应用

在学生掌握了公式的正用、逆用的基础上, 教师应进一步指导学生进行变形应用, 从某种意义上讲, 一个数学公式, 学生是否灵活掌握, 往往在于对公式的变形应用。

例: 1. 求 $\tan 20^\circ + \tan 40^\circ + \sqrt{3} \tan 20^\circ \tan 40^\circ$ 的值。

2. 设 $\triangle ABC$ 不是直角三角形, 证明: $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$

分析: 利用公式 $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$ 的变形: $\tan \alpha + \tan \beta = \tan(\alpha + \beta)(1 - \tan \alpha \tan \beta)$

$$\text{解: } \tan 20^\circ + \tan 40^\circ = \tan(20^\circ + 40^\circ)(1 - \tan 20^\circ \tan 40^\circ)$$

$$= \sqrt{3} - \sqrt{3} \tan 20^\circ \tan 40^\circ$$

$$\text{则: } \tan 20^\circ + \tan 40^\circ + \sqrt{3} \tan 20^\circ \tan 40^\circ$$

$$= \sqrt{3} - \sqrt{3} \tan 20^\circ \tan 40^\circ + \sqrt{3} \tan 20^\circ \tan 40^\circ = \sqrt{3}$$

$$2. \text{左边} = \tan(A+B)(1 - \tan A \tan B) + \tan C$$

$$= \tan(\pi - C)(1 - \tan A \tan B) + \tan C$$

$$= -\tan C(1 - \tan A \tan B) + \tan C$$

$$= -\tan C + \tan A \tan B \tan C + \tan C$$

$$= \tan A \tan B \tan C$$

= 右边

\therefore 原式得证

实践证明, 数学公式是非常重要的, 教法也是灵活多样的, 只要我们在教学中注意了以上几个方面, 就一定能使学生很好地掌握数学公式。

参考文献

[1] 鲁成来. 浅谈初中数学教学中学生计算能力的培养[J]. 新课程学习(中), 2013(9): 15-15.

[2] 蔡道法. 谈谈初中数学公式、法则的教学[J]. 中学教研: 数学版, 1985(5): 39-41.