# 三棱锥外接球的模式化解题策略

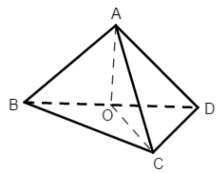
黄小妹
（福建省泉州市城东中学 福建 泉州 362000）

简单多面体的外接球问题，特别是三棱锥的外接球问题，是高中各类试卷中的常见题，也是热点题，它能全方位，多角度，深层次考查学生观察能力、空间想象能力、作图能力和分析和解决问题的能力，考查学生的直观想象、逻辑推理、数学运算和数学抽象等核心素养.多面体的外接球问题实质是计算球的半径或确定球心O的位置问题，其中球心的确定是关键.本文通过具体案例谈谈这类问题的“模式化”解题策略.

模式一、有公共斜边的两个直角三角形的三棱锥，则斜边的中点就是三棱锥外接球的球心.

例1 在三棱锥A－BCD中，已知AB⊥AD，BC⊥CD，AB＝AD＝$\sqrt{2}$，则三棱锥A－BCD外接球的体积为 .

【解析】取BD的中点O，连结AO、CO




∵AB⊥AD，BC⊥CD

∴BD是Rt△ABD、Rt△CBD公共的斜边

∵O为BD的中点

∴OA＝OC＝OB＝OD＝$\frac{1}{2}$BD

∴O是三棱锥A－BCD外接球的球心

又AB＝AD＝$\sqrt{2}$

∴BD＝$\sqrt{2}$AB＝2

∴外接球的半径为R＝1

∴三棱锥A－BCD外接球的体积为$V=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\pi\times 1^3=\frac{4}{3}\pi$

故答案为：$\frac{4}{3}\pi$.

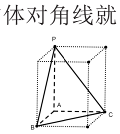
【点评】多面体的每个顶点都落在其外接球的球面上，所以球O到每个顶点的距离相等.若能找出到多面体各顶点距离相等的点，即可确定球心.

模式二：若三棱锥有三条棱两两垂直，则可将其补形为长方体求解外接球问题，三条棱分别为长、宽、高.

例2 三棱锥P－ABC中，PA⊥平面ABC，AB⊥AC，PA＝5，AB＝3，AC＝4，则三棱锥P－ABC外接球的表面积为 .

【解析】将三棱锥P－ABC补成长方体，如图：

则三棱锥的外接球即长方体的外接球，长方体的体对角线就是外接球的直径.



∴$2R=\sqrt{AC^2+AB^2+PA^2}=\sqrt{4^2+3^2+5^2}=5\sqrt{2}$

∴$R=\frac{5\sqrt{2}}{2}$

∴三棱锥P－ABC外接球的表面积$S=4\pi R^2=4\pi\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2=50\pi$

故答案为：50π.

【点评】长方体外接球球心是其体对角线中点，半径为体对角线长的一半.若长方体的长、宽、高分别为a，b，c，则外接圆半径为$R=\frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{2}$.

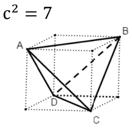
模式三：若三棱锥的三对对棱分别相等，则可将其补形为长方体求解外接球问题，三对对棱为长方体的三对面对角线.

例3 三棱锥A－BCD中AB=CD=$\sqrt{5}$，AD=BC=2，AC=BD=$\sqrt{7}$，则该几何体外接球的体积为________.

【解析】将三棱锥A－BCD补成长方体，如图：

则三棱锥的外接球即长方体的外接球，长方体的体对角线就是外接球的直径.

设长方体的长、宽、高分别为a，b，c，则$\begin{cases}a^2+b^2=5\\b^2+c^2=4\\a^2+c^2=7\end{cases}$




∴$a^2+b^2+c^2=8$

∴$2R=\sqrt{a^2+b^2+c^2}=2\sqrt{2}$

∴R=$\sqrt{2}$

∴几何体外接球的体积为$V=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\pi(\sqrt{2})^3=\frac{8}{3}\sqrt{2}\pi$

故答案为：$\frac{8}{3}\sqrt{2}\pi$.

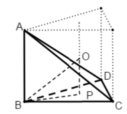
【点评】补形法是解决三棱锥外接球问题非常重要的数学方法，学生在做题时准确把握、识别应用补形法的条件，就能将复杂的问题简单化，提高解题效率.

模式四：有一组线面垂直的棱锥，则可以该线为棱，该面为底补成直棱柱求解外接球问题.

例4 在三棱锥中，AB⊥平面BCD，BC＝CD＝DA＝$2\sqrt{3}$，且三棱锥A－BCD的体积为6，则三棱锥A－BCD外接球的表面积为________.

【解析】将三棱锥补成直三棱柱，如图：

则外接球球心在三棱柱的中心，球心到底面的距离d等于三棱柱的高AB的一半.




∵三棱锥A－BCD的体积为6，BC＝CD＝DA＝$2\sqrt{3}$

∴$\frac{1}{3}\times\left[\frac{1}{2}\times 2\sqrt{3}\times 2\sqrt{3}\times\sin 60^\circ\right]\times AB=6$

∴$AB=2\sqrt{3}$

设△BCD的外接圆圆心为P，由正弦定理得$2BP=\frac{2\sqrt{3}}{\sin 60^\circ}=4$

∴BP=2

∵$OB=\sqrt{BP^2+OP^2}=\sqrt{2^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{7}$

∴$R=\sqrt{7}$

∴球O的表面积为$S=4\pi R^2=4\pi\times(\sqrt{7})^2=28\pi$

故答案为：$28\pi$.

【点评】直三棱柱的外接球的球心是上下底面外心连线的中点，设三棱柱的高为h，底面外接圆的圆为为r，则外接球半径$R=\sqrt{r^2+\left(\frac{h}{2}\right)^2}$.

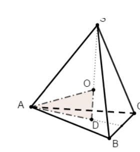
模式五：正棱锥的外接球球心在其高所在直线上，半径可在以球心、底面中心、底面一个顶点为顶点组成的直角三角形中求解.

例5：已知正三棱锥S－ABC的底面边长为$3\sqrt{2}$，侧棱长为$2\sqrt{6}$,，则三棱锥外接球的表面积为________.

【解答】解：设△ABC的外接圆圆心为D，则SD为正三棱锥S－ABC的高

由正弦定理得$2AD=\frac{3\sqrt{2}}{\sin 60^\circ}=2\sqrt{6}$

∴$AD=\sqrt{6}$




∴$SD=\sqrt{SA^2-AD^2}=\sqrt{(2\sqrt{6})^2-(\sqrt{6})^2}=3\sqrt{2}$

设外接球的半径为R，则OA＝OS＝R

∵$OA^2=AD^2+OD^2$

∴$R^2=(\sqrt{6})^2+(3\sqrt{2}-R)^2$

∴$R=2\sqrt{2}$

∴三棱锥外接球的表面积为$S=4\pi R^2=4\pi\times(2\sqrt{2})^2=32\pi$ .

故答案为：$32\pi$.

【点评】设正三棱锥的体高为h，底面外接圆半径为r，三棱锥外接球半径为R，则$R^2=r^2+(h-R)^2$.

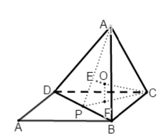
模式六：由两个等腰三角形或全等三角形拼接的三棱锥，过两个三角形的外接圆圆心分别作所在平面的垂线，交点即为外接球球心.

例6 已知菱形ABCD的对角线AC，BD交于点P，AB＝6，$\angle DAB=60^\circ$，将菱形沿对角线BD对折，使$\angle APC=60^\circ$，则三棱锥外接球的体积为________.

【解析】设△ABD，△BCD的外接圆圆心分别为E、F，过E，F分别作平面ABD与平面BCD的垂线，相交于O，则O为三棱锥外接球的球心.

在等边△ABD和等边△BCD中

由正弦定理求得$AP=CP=3\sqrt{3}$，$AE=CF=2\sqrt{3}$，$PE=PF=\sqrt{3}$，




∵$\angle APC=60^\circ$

∴$\angle OPF=\frac{1}{2}\angle APC=30^\circ$

∴$OF=PF\cdot\tan 30^\circ=1$

∴$OC=\sqrt{OF^2+FC^2}=\sqrt{1^2+(2\sqrt{3})^2}=\sqrt{13}$

∴$R=\sqrt{13}$

∴三棱锥外接球的体积为$V=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\pi\times(\sqrt{13})^3=\frac{52}{3}\sqrt{13}\pi$

故答案为：$\frac{52}{3}\sqrt{13}\pi$.

【点评】本题利用球心与其截面的圆心连线垂直于截面这一性质，来确定球心的位置.这种思路是探求三棱锥外接球半径的通解通法，该方法的实质就是利用等价转化的数学思想方法把立体几何问题转化为平面几何问题来研究.