# 离心率问题的解决策略
## ——浅谈椭圆离心率的解法

谭嘉敏
（广东省河源市连平县连平中学　广东　河源　517100）

[摘　要] 高考中，解析几何一直是考察的重点内容，圆锥曲线离心率的考查主要是对圆锥曲线几何性质考查的集中体现，本文主要从以下三个角度：离心率的定义与椭圆的定义相结合，方程思想，数形结合思想浅谈圆锥曲线椭圆离心率问题的解决策略。

[关键词] 椭圆；离心率；解法

1 问题提出

例1椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左右焦点分别为$F_1,F_2$，若椭圆上存在一点$P$使得$\angle F_1PF_2=\frac{\pi}{2}$，求离心率$e$的取值范围。

这是一道求椭圆离心率的问题，这道题目给学生的感觉是“条件简洁，问题清楚”，但有一部分同学“看起题目来容易，做起来难”．归结起来主要是以下 三个方面：第一，审题不清，不会将题目信息等价转化为式子表达；第二，对椭圆的有关性质不熟悉；第三，计算有困难，本文从椭圆离心率的有关知识要点出发，结合所学过的知识，浅谈如何解决椭圆的离心率问题。

2 分析与解决

2.1 知识要点分析

1）椭圆的定义：把平面内与两个定点$F_1,F_2$的距离之和等于常数（大于｜$F_1F_2$｜）的点的轨迹叫做椭圆．这两个定点叫做椭圆的焦点，两焦点间的距离叫做椭圆的焦距。

2）椭圆的方程：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0，a^2=b^2+c^2)$

3）椭圆离心率的定义和范围：椭圆的焦距与长轴长的比 称为椭圆的离心率，用 e表示，即$e=\frac{c}{a}$．因为 a>c>0，所以 0<e<1．P是椭圆任一点，F是椭圆焦点，则$a-c\le|PF|\le a+c$。

4）$\Delta ABC$的正弦定理：$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$（$R$是$\Delta ABC$外接圆半径）

5）与椭圆离心率相关的常见题型：求 e的值，求e的范围.

2.2 问题解决

基于曲线方程蕴含的几何要素：

①请根据条件作出图形，并研究图形具有什么样的几何特征？

②请问上述几何图形具有怎样的边角关系？

③你能寻找到曲线离心率与上述几何图形边角的关系吗？

④根据题意所蕴含的几何量，能否找出与a，b，c，e的关系呢？要求e的范围，能否列出有关e的不等式呢？

⑤你能否基于相关几何图形获得更多的一般性的结论？

解法1

在$\Delta F_1PF_2$中，设$PF_1=m,PF_2=n$

由椭圆定义得$m+n=2a$

因为$\angle F_1PF_2=\frac{\pi}{2}$，所以$m^2+n^2=4c^2$

又因为$a^2=b^2+c^2$得$mn=2b^2$

因为$mn\in\left[b^2,a^2\right]$，所以$b^2\le 2b^2\le a^2$

所以$\frac{\sqrt{2}}{2}\le e<1$

解法2

设$P(x,y)$

因为$\angle F_1PF_2=\frac{\pi}{2}$，所以$\overline{F_1P}.\overline{F_2P}=0$即$x^2+y^2=c^2$

又椭圆方程得$y^2=b^2-\frac{b^2x^2}{a^2}$

解得$x^2=a^2-\frac{a^2b^2}{2}$

因为$0\le x^2\le a^2,0<e<1$

所以$\frac{\sqrt{2}}{2}\le e<1$

解法3

在$\Delta F_1PF_2$中，设$\angle PF_1F_2=\alpha,\angle PF_2F_1=\beta$

由正弦定理得$\frac{2c}{\sin 90^0}=\frac{PF_2}{\sin\alpha}=\frac{PF_1}{\sin\beta}=\frac{PF_1+PF_2}{\sin\alpha+\cos\alpha}$

所以$e=\frac{2c}{2a}=\frac{1}{\sqrt{2}\sin(\alpha+45^0)}$即$\frac{\sqrt{2}}{2}\le e<1$

评析 考查了直角三角形的三角函数和椭圆的简单几何性质等知识，由椭圆的范围来求解离心率的范围。解法1，利用椭圆定义$|PF_1|+|PF_2|=2a$，和离心率的定义建立了 a，b，c的方程 或其中任意两个的关系式，从而算 出离心率的值或范围，这是我们解决上述问题应优先考虑的通性通法．解法2基于位置关系所反映的数量关系和坐标特征，构建a，b，c的方程，联立方程，根据椭圆的范围来获取离心率（范围）。解法3基于几何图形蕴含的几何特征，通过构图，根据边角的关系，由正弦定理得到有关a，c的方程，从而得到离心率的范围。

2.4拓展

由上述，我们可以得到，在椭圆中，设P是椭圆上的任意一点，$F_1,F_2$分别是椭圆的两个焦点，$\angle F_1PF_2=\theta\Rightarrow e\ge\sin\frac{\theta}{2}$

证明如下：

设$|PF_1|=x,|PF_2|=y$,则$x+y=2a$,

在$\Delta PF_1F_2$中，由余弦定理得

$$\cos\theta=\frac{x^2+y^2-(2c)^2}{2xy}=\frac{(x+y)^2-2xy-(2c)^2}{2xy}=\frac{4a^2-4c^2}{2xy}-1$$

$$\ge\frac{4a^2-4c^2}{2(\frac{x+y}{2})^2}-1=\frac{4a^2-4c^2}{2a^2}-1=1-2e^2$$

因此，$e^2\ge\frac{1-\cos\theta}{2}=\sin^2\frac{\theta}{2}$

当且仅当$x=y$时等号成立

所以$e\ge\sin\frac{\theta}{2}$

3 结束语

在高考中，离心率一般是作为小题来考察的，方法与技巧特别多，本文主要从离心率的定义与椭圆的定义相结合，根据题意反映得数量关系联立方程思想，数形结合思想，三个角度来探索椭圆的离心率解法。在学生的做题情况，存在以下情况，第一，审题不清，不会将题目信息等价转化为式子表达；第二，对椭圆的有关性质不熟悉；第三，计算有困难。

因此，第一，在教学过程中数学教师要特别重视概念教学的研究，注重数学概念产生的背景，以及它的发生、发展和应用，注重数学过程的体验，教师的理解不等于学生的理解，教师的问题不等于学生的问题，教师的思维不等于学生的思维，在教学过程中发掘学生的思维比单纯知识灌输重要。在审题教学方面学生能够说的，能够做的，就尽量让学生去做，哪怕会跌倒，也会给他带来总结和教训。在课堂上，不要期望你预设的问题学生能够一下子给出完美的回答，多留一点思考的时间给学生，使他的思维由简单到深入，使他的见识由表面到本质。第二，适度的训练一题多解，一题多解就是让学生从多个角度去理解同一个问题，运用不一样的数学知识来解决同一个问题。一题多解对于巩固学生的所学的知识有比较大的帮助。第三，在教学过程中，应特别强调对学生计算能力的培养 我们应将这种训练和培养融入到每节课中，尽可能的让学生自己动手去计算，不要一下子就吐露出自己的想法，让学生在你说出来之前去猜，尽量让他们自己想出来。然后勇敢的表达书写出来，如果实在算不下去了，要善于在学生无路处指路，无梯处搭梯。

参考文献

[1]郝保国.三道自主招生试题同一题源探胜[J].中学数学研究（华南师范大学版），2016（15）：7-9.

[2]许昌满. 一道数学高考试题的多元透析[J]. 中学教研（数学），2014（12）：36. 39.