# 例谈“设而不求”在超越函数零点问题的应用

覃发岗

（湖北省利川市第五高级中学　湖北　利川　445400）

[摘　要] “设而不求”在解决超越函数零点问题时通过等式代换，将超越函数化为普通函数，从而将复杂问题简单化.

[关键词] 设而不求；超越函数；零点

函数导数综合问题中，我们经常遇到因为导函数是超越函数而造成导函数的零点无法确定，进而导致原函数的单调区间、极值点、最值等相应受阻. 如果从解决问题上来看也不需要求出导函数的零点，这时我们可对零点采取“设而不求”的方法进行处理，本文就举例说明“设而不求”在超越函数零点问题的应用.

例1（2017年全国二卷理科）已知$f(x)=x^2-x-x\ln x$，且$f(x)\ge 0$. 证明：

$f(x)$存在唯一的极大值点$x_0$，且$e^{-2}<f(x_0)<2^{-2}$.

证明：由$f(x)=x^2-x-x\ln x$有$f'(x)=2x-2-\ln x$，设$h(x)=2x-2-\ln x$，则$h'(x)=2-\frac{1}{x}$，当$x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$时，$h'(x)<0$；

当$x\in\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$时，$h'(x)>0$.

所以$h(x)$在$\left(0,\frac{1}{2}\right)$上是单调递减函数，

在$\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$上单点递增.

$h(e^{-2})=2e^{-2}>0$，$h(\frac{1}{2})=-1+\ln e<0$，$h(1)=0$所以$h(x)$在$\left(0,\frac{1}{2}\right)$上有唯一的零点$x_0$，在$\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$上有唯一的零点1，

当$x\in(0,x_0)$时，$h(x)>0$；当$x\in(x_0,1)$时

$h(x)<0$；当$x\in(1,+\infty)$时，$h(x)>0$，

故$x_0$是$f(x)$唯一的极大值点，从而由

$h(x_0)=f'(x_0)=2x_0-2-\ln x_0=0$，得

$\ln x_0=2x_0-2$，又因为

$$\begin{aligned}f(x_0)&=x_0^2-x_0-x_0\ln x_0\\&=x_0^2-x_0-2x_0(x_0-1)\\&=x_0-x_0^2\end{aligned}$$

由$x_0\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$，有$f(x_0)\in\left(0,\frac{1}{4}\right)$，因为$e^{-1}\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$，故$f(e^{-1})=e^{-2}<f(x_0)<2^{-2}$.

评注：解决此类题往往需要求出函数的极值，而极值点又不能直接解出来，于是根据函数单调性确定函数零点的个数，再结合零点存在定理确定零点取值范围，从而设出极值点$x_0$，最后通过代换求出函数的极值或最值.

例2已知函数$f(x)=axe^x-\ln x-x-1$，当$f(x)\ge 0$恒成立时，求$a$的取值范围.

解：$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，由$f(x)=axe^x-\ln x-x-1\ge 0$恒成立，即$a\ge\frac{\ln x+x+1}{xe^x}$恒成立. 令$h(x)=\frac{\ln x+x+1}{xe^x}$，则$h'(x)=\frac{(x+1)(-\ln x-x)}{x^2e^x}$.

令$p(x)=-\ln x-x$，则$p'(x)=-\frac{1}{x}-1<0$，

故$p(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减，且，$p(\frac{1}{e})=1-\frac{1}{e}>0$，$p(1)=-1<0$，故存在$x_0\in\left(\frac{1}{e},1\right)$使得$p(x_0)=-\ln x_0-x_0=0$，故$x_0=e^{-x_0}$. 当$x\in(0,x_0)$时，$p(x)>0$，$h'(x)>0$；当$x\in(x_0,+\infty)$时，$p(x)<0$，$h'(x)<0$，所以$h(x)_{\max}=h(x_0)=\frac{\ln x_0+x_0+1}{x_0e^{x_0}}=1$，故$a\ge 1$.

评注：用“设而不求”解决恒成立问题中参数问题时，往往需要综合运用分离参数、构造函数、多次求导、函数单调性、零点存在定理、二分法探索零点等相关数学知识和化归与转化等数学思想方法共同协作完成.

例3（2015年全国卷一文科）设函数$f(x)=e^{2x}-a\ln x$，证明：$a>0$时，$f(x)\ge 2a+a\ln\frac{2}{a}$.

证明：$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，$f(x)$的导数为$f'(x)=2e^{2x}-\frac{a}{x}$. 当$a>0$时，$f'(x)$为增函数，不妨设$f'(x)$的唯一零点为$x_0$，$f'(x_0)=2e^{2x_0}-\frac{a}{x_0}=0$，则$e^{2x_0}=\frac{a}{2x_0}$，$-\ln x_0=2x_0+\ln\frac{2}{a}$，故$f(x)$在$(0,x_0)$上单调递减，在$(x_0,+\infty)$单调递增. 所以当$x=x_0$时，$f(x)$取得最小值，最小值为

$$\begin{aligned}f(x_0)=e^{2x_0}-a\ln x_0&=\frac{a}{2x_0}+2ax_0+a\ln\frac{2}{a}\\&\ge 2a+a\ln\frac{2}{a}\end{aligned}$$

所以当$a>0$时，$f(x)\ge 2a+a\ln\frac{2}{a}$.

评注：当导数零点存在但无法直接求出时，可采用设而不求的方法求出零点，再通过零点所满足的等式进行推理或代换可将超越函数转化为普通函数，将复杂问题简单化.

“设而不求”在解决超越函数零点问题时依据零点存在定理，设出零点，但不去求解出具体的值，与圆锥曲线的“设而不求”有异曲同工之妙.

**参考文献**

[1]江志杰. 基于设而不求的导函数零点构设[J]. 中小学数学：高中版，2016（4）：52-53.

[2]邹生书. 例谈“零点设而不求”在解题中的应用[J]. 中学生数学：高中版，2012（4）：30-31.