

一的妙用

张宽

(重庆市彭水县彭水第一中学 重庆 409600)

[摘要] 在数学中,“1”是一个很神奇的数字,它既简单又复杂,说它简单是从形式上看它很简单,说它复杂是因为它在数学中的变化很复杂,在解决相关的数学问题时,对隐藏的一个“1”作出巧妙的变形往往会给我们解决问题带来极大的方便。本文既是对“1”在中学数学中的一些问题进行研究,从而发现它在解决问题的过程中是如何起到事半功倍的效果的。

[关键词] 1; 妙用; 巧妙变形; 中学数学

“1”在数学中的妙用很多,在中学数学中,主要在三角函数、不等式、圆锥曲线中出现较多,在有些问题中对不变量“1”作一些恒等变形,可以发现解决问题变得容易起来,下面即对“1”在这些问题中的一些巧妙运用进行研究。

“1”是一个多面手,在不同的题中,以不同的形式表现出来,需要我们认真观察、体会,常用的“1”的代换及妙用有:

- (1) $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$
- (2) $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$
- (3) $\sec^2 \alpha - \tan^2 \alpha = 1$
- (4) $\csc^2 \alpha - \cot^2 \alpha = 1$
- (5) $C_n^n = 1$
- (6) $1-x+x=1$ 等

巧妙的利用这些知识可以使简单快捷地解决相应的一些问题。

一、“1”在三角函数中的妙用

“1”在三角函数中的运用很常见,下面对它进行相关的研究总结。

(一) “ $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ ”的运用

在中学数学中, $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ 的巧妙运用非常频繁也非常重要,在一些题目中,倘若不懂得它的巧妙运用,则会陷入对问题不知如何解决的困境,反之,懂得了对它的巧妙运用,则会发现问题随之迎刃而解了,下面举例来说明一下是如何对它进行巧妙运用的。

例1^[1] 已知 α 是第一象限的角,化简下式 $\sqrt{1+2\sin \alpha \cos \alpha}$

分析 对于根式的化简,思路主要是去根号,而对这个问题首先要考虑根式下的式子是否能构成完全平方式,沿着这个思路,我们可以联想到 $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ 。

$$\begin{aligned} \text{解 } \sqrt{1+2\sin \alpha \cos \alpha} &= \sqrt{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 2\sin \alpha \cos \alpha} = \sqrt{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2} \\ &= \sin \alpha + \cos \alpha \end{aligned}$$

$\Theta \alpha$ 是在第一象限 $\Theta \sin \alpha > 0, \cos \alpha > 0$

$$\therefore \sqrt{1+2\sin \alpha \cos \alpha} = \sin \alpha + \cos \alpha$$

例2^[1] 已知 $\tan A=3$, 求 $\sin A \cos A$ 的值

分析 这道题是一个齐次式,这类题目的特点是已知角 A 的正切值,求含有正弦和余弦的三角多项式的值,解题的方法是化弦为切,而这道题要用化弦为切有困难,所以就要观察它的特点,没有分母让它无法用传统方法解题。我们发现 $\sin A \cos A$ 的分母是1,而 $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$, 这样题目就迎刃而解了。

$$\begin{aligned} \text{解 } \text{因为 } \tan A=3 \text{ 所以} \\ \sin A \cos A &= \frac{\sin A \cos A}{1} = \frac{\sin A \cos A}{\sin^2 A + \cos^2 A} \\ &= \frac{1}{\frac{\sin^2 A + \cos^2 A}{\sin A \cos A}} = \frac{1}{\tan A + \frac{1}{\tan A}} \quad \therefore \sin A \cos A = \frac{1}{3 + \frac{1}{3}} = \frac{3}{10} \end{aligned}$$

(二) 形如 $a \sin A + b \cos A$ 的三角函数形式的化简与求最值问题中“ $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$ ”的运用

$$a \sin A + b \cos A = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin A + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos A \right)$$

因为 $(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}})^2 + (\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}})^2 = 1$ 所以可以联想到 $\sin^2 B + \cos^2 B = 1$

则由此可设 $\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \cos B, \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sin B$

或设 $\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \cos B$

$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sin B$ 此时可得

$$a \sin A + b \cos A = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(A+B) \text{ 或 } a \sin A + b \cos A = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(A-B)$$

例3^[2] 求函数 $f(x) = \sin^2 x + 2 \sin x \cos x + 3 \cos^2 x$ 的最大值,并求出此时的 x 的值。

$$\begin{aligned} \text{解 } f(x) &= \sin^2 x + 2 \sin x \cos x + 3 \cos^2 x = \sin^2 x + \cos^2 x + \sin 2x + \cos 2x + 1 \\ &= \sin 2x + \cos 2x + 2 = \sqrt{2} \sin(2x + \frac{\pi}{4}) + 2 \end{aligned}$$

$$\text{当 } 2x + \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \text{ 即 } x = k\pi + \frac{\pi}{8} (k \in \mathbb{Z}) \text{ 时, 最大值 } f(x) = \sqrt{2} + 2$$

二、“1”在不等式中的妙用

在不等式中“1”的妙用主要是 $x \cdot \frac{1}{x} = 1$,

$\frac{A}{B} \geq 1 \Rightarrow A \geq B (A > 0, B > 0)$, $1-x+x=1$ 等相关知识的巧妙运用。

(一) “ $1-x+x=1$ ”的运用

例4^[5] 若 $0 < x < 1$, 求 $\frac{1}{x} + \frac{4}{1-x}$ 的最小值是多少?

$$\text{解 } \text{由 } \frac{1}{x} + \frac{4}{1-x} = [(1-x)+x] \times (\frac{1}{x} + \frac{4}{1-x}) = \frac{1-x}{x} + \frac{4x}{1-x} + 5$$

$$\text{由 } 0 < x < 1, \text{ 那么 } \frac{1-x}{x} + \frac{4x}{1-x} \geq 2\sqrt{\frac{4x \cdot (1-x)}{x \cdot (1-x)}}, \text{ 于是 } \frac{1-x}{x} + \frac{4x}{1-x} \geq 4$$

$$\text{当 } \frac{1-x}{x} = \frac{4x}{1-x} \text{ 即 } x = \frac{1}{3} \text{ 时, } \frac{1}{x} + \frac{4}{1-x} \text{ 的最大值是 } 9.$$

评析 本题表面上看不能使用基本不等式,但稍留心即可以从两个分母中发现“名堂”,一个分母是,另一个分母是 $1-x$ 。两个数的和正好是“1”,于是巧乘“1”便油然而生。

(二) “ $x \cdot \frac{1}{x} = 1$ ”的运用

例5^[5] 已知 $x, y \in \mathbb{R}, x > 0, y > 0, \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$, 求 $x+y$ 的最小值。

$$\text{解 } \text{取 } m > 0, n > 0, \text{ 设 } \frac{1}{x} = \frac{m}{m+n}, \frac{1}{y} = \frac{n}{m+n}, \text{ 则 } x = 1 + \frac{n}{m}, y = 1 + \frac{m}{n}$$

$$x+y = (1 + \frac{n}{m}) + (1 + \frac{m}{n}) = 2 + \frac{m}{n} + \frac{n}{m} \geq 2 + 2\sqrt{\frac{n}{m} \cdot \frac{m}{n}} = 4$$

当且仅当 $x=2, y=2$ 时取等号,所以当 $x=2$, 此时, $x+y$ 取得最小值4。

三、“1”在解析几何中的应用

在解析几何中“1”的妙用大多是把其转化为三角函数后,

浅谈小学音乐教学方法的多样性

王 帅

(吉林省通化市东昌区第二实验小学 吉林 通化 134000)

【摘要】小学音乐教育的教学方法,有着自身的特殊性,它不能采用非常严肃地、单纯灌输的方式来讲解注入,也不能像民间艺人一样,采用一句一句地口传心授;也不能像专业音乐学校中强调专业技能的训练;更不能像几十年来一直采用的教几支歌就算上音乐课的方法。它应以多样的、科学的教学法施诸于不同程度的教育对象。并要既有循序渐进的规律性,又有随机应变的灵活性,随时注意考虑怎样才能使学生能够接受的更多些、更快些、精神上更愉快些。

【关键词】小学音乐;教学方法;多样性

小学音乐教育是素质教育的一部分,是培养青少年成为德、智、体、美诸方面全面发展的新型人才所不可缺少的重要组成部分。

小学音乐教育的教学方法,有着自身的特殊性,它不能采用非常严肃地、单纯灌输的方式来讲解注入,也不能像民间艺人一样,采用一句一句地口传心授;也不能像专业音乐学校中强调专业技能的训练;更不能像几十年来一直采用的教几支歌就算上音乐课的方法。它应以多样的、科学的教学法施诸于不同程度的教育对象。并要既有循序渐进的规律性,又有随机应变的灵活性,随时注意考虑怎样才能使学生能够接受的更多些、更快些、精神上更愉快些。

我就自己在教学中的实践探索和感受粗略谈一谈浅显的看法。

首先,小学音乐课堂组织教学的方法应具有多样性。小学生大多在十岁以下,他们求知欲旺盛,活动性大,模仿力强,但持久性和耐力差。所以,在组织教学中应注意采用灵活多样、生动活泼、通俗易懂的方法进行教学,才能收到预期的效果。

其次,组织教学的方式方法,应注意各阶段学生的心理、生理特点。小学低年级儿童易用引导、鼓励、表扬等进行诱导;中、高年级则应多采用启发、思考、发现等方法进行疏导。另外,教师在组织教学中应结合自身各方面条件,扬长避短,使自己始终保持一定的权威性、示范性,减少失误。

根据小学音乐教学内容及学生特点,教学方法具有多样性。下面是我对部分教学内容,选择相关教学方法的一些体会,与同行们商榷。

音乐欣赏内容努力采用发现式教学法。为了让学生更好地理解作品,努力创设问题情景,比如通过讲解作者生平,时代背

景,作品创作动机等问题,将学生带入特定的情景,进而理解作品,达到与作者的心理共鸣。我在讲解[苏]普洛克菲耶夫的交响童话《彼得与狼》时,除了介绍作品用不同乐器描绘刻画人物和动物的性格外,努力引导学生们自己去发现、体会作品的特点和作者当时的心境。通过交流我发现同学们除了一些共性的体会外,感受作品明显与学生个性有关。有些同学虽然对乐器特点与人物、动物特征把握不准,但对作品的整体美体会很深。

讲授法仍是小学音乐教学中重要的教学方法。只是在音乐教学中趣味性比科学性更重要,因此要避免严肃刻板地讲述,要运用形象比喻和有趣味的语言,深入浅出地讲解、传授新知识。这不但能唤起学生的注意力,也会加深学生的记忆。

直观现场教学法在视唱教学中的应用。比如用铅笔、小树枝等制成各种尺寸长度的小棒,拼搭成各种不同的节奏型或某一旋律所唱的节奏。

利用指唱方法帮助学生唱好跨度较大的音程。唱好音程的基础是唱准音阶。音阶的练习要持之以恒,才能牢固地打好学生音准的概念。

要上好一节音乐课,只运用几种教学方法是远远不够的,还需在整个教学手段上、在教学环节的设计和课堂布局上进行精雕细刻。只要教师在教学实践中多动脑筋想办法,采取多种多样生动、通俗的方法进行教学,一定能使学生顺利地准确地掌握教材中所规定的技能。

参考文献

- [1]付江涛. 中小学音乐教育对学生创新能力培养的方法探究[J]. 学科教学(音乐)河南师范大学, 2014.
- [2]吴宇. 韩国中小学传统音乐文化教育的启示[J]. 北京音乐教育国际论坛, 2014.

(上接第365页)

再利用三角函数中的“1”,将其转化,主要是涉及圆和椭圆的参数方程。

例10 已知 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, 求 $2x + y$ 的最小值。

解 $\because \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1 \therefore$ 可设 $\frac{x}{2} = \cos \theta, y = \sin \theta$

则 $x = 2 \cos \theta \quad y = \sin \theta$

$2x + y = 4 \cos \theta + \sin \theta = \sqrt{4^2 + 1^2} \sin(\theta + \varphi) = \sqrt{17} \sin(\theta + \varphi)$

$\because \sin(\theta + \varphi)$ 的最小值为 $-1 \therefore 2x + y$ 的最小值为 $-\sqrt{17}$

评析 此种类型题目倘若不懂得运用“1”的巧妙运用,则会解起来很复杂,一旦懂得了“1”的这种巧妙运用,解起来则轻松很多了,这是一道关于椭圆的类型题目,有关圆的此种类型题目也是运用此方法解会简单得多。

四、结束语

“1”在初等数学中的运用是很常见也是很重要的,它的用

法复杂多变层出不穷,若要灵活的运用,还是要通过一定量的练习去了解,上面的一些总结只是冰山一角,它的发展变化也如同数学本身的性质一样是无穷尽的。

参考文献

- [1]俞求是,李海东,方明一,张劲松,颜其鹏. 全日制普通高级中学教科书数学[M]. 北京:人民教育出版社, 2004: 30-35.
- [2]谢菲. 解题与创造性思维的培养[J]. 高中数学教与学, 2005, 18(2): 5-9.
- [3]陈宇建,齐梅芬,高英. 数学学习与研究[J]. 中学生理科月刊, 2010, 21(6): 3-12.
- [4]纪翠容. “1”在中学数学中的妙用[J]. 中学教与学, 2009, 22(11): 22-29.
- [5]谢云. “1”在中学数学中的妙用[J]. 数学教学, 2004, 25(14): 45-51.
- [6]陈明,李建,刘海东,张纪云. 中学数学重难点手册[M]. 沈阳: 山东师范大学出版社, 1998: 56-60.