浅谈条件概率及其应用

王莎莎
（重庆市彭水县彭水第一中学 重庆 409600）

[摘 要] 条件概率是概率论中最基本的概念之一，由条件概率获得的乘法公式、全概率公式、贝叶斯公式是研究概率论的重要工具.本文介绍了条件概率的意义、性质和与之相关的几个重要公式，并举例说明了条件概率在实践中的应用.

[关键词] 条件概率；全概率公式；贝叶斯公式；应用

引言

概率论与数理统计是研究随机现象的数量规律性的学科.长期以来在大批概率论统计工作者的不懈努力下，形成了众多分支，在现代数学中占有重要的地位.而条件概率又是概率论与数理统计的一个重要知识点，它主要用于计算比较复杂事件的概率.本文从条件概率的意义、性质和与之相关的几个重要公式，以及条件概率的应用等几个方面来分析、探讨条件概率.

一、条件概率的意义和性质

（一）条件概率的意义

若(Ω,F,P)是一个概率空间，$A\in F$，且$P(B)>0$，则对任意的$A\in F$，称 $P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}$为已知事件$B$发生的条件下，事件$A$发生的条件概率.

定义 设A、B为随机试验E中的两个事件，且$P(A)>0$，则称$P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$为事件$A$发生的条件下，事件$B$发生的条件概率.

（二）条件概率的性质

如果$P(A)>0$，条件概率具有如下性质：

1.对任意事件B，有$P(B|A)\geq 0$；2. $P(\Omega|A)=1$，$P(\phi|A)=0$；

3.对任意可列个两两互不相容事件：$A_1,A_2,\cdots A_n\cdots$，有

$P(\sum_{i=1}^{\infty}A_i|A)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i|A)$；

4.对于一般的事件A_1与A_2，有

$P(A_1\cup A_2|A)=P(A_1|A)+P(A_2|A)-P(A_1A_2|A)$；

5. $P(B|A)+P(\overline{B}|A)=1$；

6.当$B\subset A$时，有$P(B|A)=\dfrac{P(B)}{P(A)}$；当$B\supset A$时，有$P(B|A)=1$.

二、条件概率的几个重要公式

由条件概率公式：$P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$，将此公式移项，即得乘法公式：

$P(AB)=P(A)P(B|A)$，$P(A)>0$， （1）

我们很容易想到，乘法公式应该还有另外一种形式，即

$P(AB)=P(B)P(A|B)$，$P(B)>0$. （2）

三、条件概率的应用

条件概率的判定

在条件概率的判定方面，需要注意的两个问题是：

1.条件概率与无条件概率的区别

条件概率与无条件概率相对来讲是比较好区别的，例如甲乙两个小组加工相同的产品各500件，其中甲组生产的产品中有25件次品，乙组生产的产品中有15件次品.今从全部的1000件产品中抽取一件，求：

①取到的产品是次品的概率；②它是甲组生产的，取到的产品是次品的概率.

经过对题意的分析可知：

设A={取到的产品是次品} B={甲组生产的} $\overline{B}$={乙组生产的}则①中的目标事件是A.因为它可能是甲组生产的，也可能是乙组生产的.由于没有先决条件，故它是无条件概率.②中的目标事件是A/B.因为“取到的产品是次品”是一个随机事件，“它是甲组生产的”是一个先决条件，是已经发生了的.所以目标事件的概率为：①$P(A)=\dfrac{40}{1000}=0.04$， ②$P(A|B)=\dfrac{25}{500}=0.05$.

2.条件概率与积事件概率的关系

设A，B是随机试验对应的样本空间S中的两个事件，$P(AB)$是A，B同时发生的概率，而$P(B|A)$是在A发生的条件下B发生的概率.从样本空间的角度来看，这两种事件所对应的样本空间发生了改变.求$P(AB)$时，仍在原来的样本空间S中进行讨论，而求$P(B|A)$时，所考虑的样本空间就不是S了，这是因为前提条件中已知道了一个条件（即A已发生），这样所考虑的样本空间的范围缩小了.因此$P(AB)=P(A)P(B|A)$（$P(A)>0$）.

但在实际应用中，这两个概念很容易混淆，从而导致错误结果.

比如掷硬币问题，投掷一枚硬币，直到出现第三次正面时才停止.问：正好第六次停止，而第五次也是正面的概率是多少？

分析 设A={出现正面} B={第五次出现正面} C={第六次停止} 则前四次中只出现了一次正面.由$P(A)=0.5$，$P(\overline{A})=0.5$则

$P(BC)=C_4^1(0.5)^1\times(0.5)^3\times(0.5)\times(0.5)=\dfrac{1}{16}$，$P(C)=C_5^2(0.5)^2\times(0.5)^3\times(0.5)=\dfrac{5}{32}$.

所以可得$P(B|C)=\dfrac{P(BC)}{P(C)}=\dfrac{\frac{1}{16}}{\frac{5}{32}}=\dfrac{2}{5}$.

其实这是一种错误的解法.产生这种错误的原因是没有注意到题中的B和C都是随机事件.B和C中没有一个事件是事前已经发生的，因此不是条件概率问题.实际上，这个问题要求同时满足“第六次停止”和“第五次出现正面”，所以这是一个典型的积事件概率问题.故正确答案是：

$P(BC)=C_4^1(0.5)^1\times(0.5)^3\times(0.5)\times(0.5)=\dfrac{1}{16}$.

结论 事件A，B在问题中的地位如果平等，则是求积事件概率；如果不平等，则是求条件概率.所谓地位平等是指A，B两个事件都是随机事件；所谓地位不平等是指A，B两个事件中，一个是随机事件，另一个是必然事件.

四、小结

通过研究条件概率的相关理论和应用可以看出条件概率的应用有很强的现实意义.今天，随着条件概率理论的广泛应用，它已不仅仅是一种用于解决实际问题的工具，而上升为具有重大认识意义的学科.条件概率不仅改变了人们研究问题的方法，更改变了人们看待世界的角度.这个世界不是绝对必然的，它充斥着大量的偶然性，所谓规律也是在相当的程度上被人们所接受和信任的命题而已.运用概率知识可以避免因为人的主观性而带来的许多错误的认识和争论，条件概率的严密证明能帮助人们更好的认识世界的本质.

参考文献

[1]魏宗舒等编.《概率论与数理统计教程》.[M].北京：高等教育出版社，1983.

[2]王梓坤.《概率论基础及其应用》.[M].北京：科学出版社，1979.

[3]孙清华.《新编概率论与数理统计题解》.[M].武汉：华中科技大学出版社，2000.

[4]盛骤，谢式千.《概率论与数理统计教程》.[M].北京：高等教育出版社，2001.

[5]孙荣恒.《应用概率统计》.[M].北京：科学出版社，2006.

[6]孙淑敌.《高等数学（二）：疑难问题分析—全概率公式和贝叶斯公式的应用》.[J].现代教育出版社，2003.

[7]陈玄令.《谈条件概率与积事件概率的关系》.[J].《渤海大学学报（自然科学版）》2004，25（1）：60-61.

[8]龚冬宝.《概率论与数理统计典型题》.[M].西安：西安文通大学出版社，2003.

[9]赵焕宗.《应用高等数学》.[M].上海：上海交通大学出版社，2001.

[10]茜余博，赵衡秀.《概率论与数理统计学习指导》.[M].北京：科学出版社2003.