

例谈导数解答题中对参数取特殊值构建不等式的策略

臧艳军

(辽宁省盘锦市高级中学 辽宁 盘锦 124000)

摘要 导数综合问题一般具有较强的综合性和创新性,常常作为高考的压轴题,能够考查考生的综合素质和数学思维能力,从不同层面考查数学运算、数学抽象、逻辑推理素养,突出理性思维,彰显选拔功能.在解决导数综合问题的过程中,常需要对参数赋值构建不等式解决相应的问题.

关键词 导数; 参数; 特殊值

导数综合问题一般具有较强的综合性和创新性,常常作为高考的压轴题,能够考查考生的综合素质和数学思维能力,从不同层面考查数学运算、数学抽象、逻辑推理素养,突出理性思维,彰显选拔功能.在解决导数综合问题的过程中,常需要对参数赋值构建不等式解决相应的问题.下面用实例进行说明.

【例题1】 已知函数 $f(x) = \ln(1+x) - \frac{ax}{x+2}$.

(I) 当 $a=0$ 时, 求曲线 $y=f(x)$ 在原点处的切线方程;

(II) 当 $a>0$ 时, 讨论函数 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上的单调性;

(III) 证明不等式 $\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n+1} < \ln\sqrt{n+1}$ 对任意 $n \in \mathbf{N}^*$ 成立.

试题解析: $f'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{2a}{(x+2)^2} = \frac{x^2 + (4-2a)x + (4-2a)}{(x+1)(x+2)^2}$.

(I) 当 $a=0$ 时, $f(0)=0$, 切线的斜率 $k=f'(0)=1$, 所以切线方程为 $y=x$, 即 $x-y=0$.

(II) 当 $a>0$ 时, 因为 $x>0$, 所以只要考查 $g(x) = x^2 + (4-2a)x + (4-2a)$ 的符号.

由 $\Delta = (4-2a)^2 - 4(4-2a) \leq 0$, 得 $0 < a \leq 2$, 当 $0 < a \leq 2$ 时, $g(x) > 0$, 从而 $f'(x) > 0$, $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增;

当 $a > 2$ 时, 由 $g(x)=0$ 解得 $x = a-2 + \sqrt{a^2-2a}$. 6分当 x 变化时, $f'(x)$ 与 $f(x)$ 的变化情况如下表:

x	$(0, a-2 + \sqrt{a^2-2a})$	$a-2 + \sqrt{a^2-2a}$	$(a-2 + \sqrt{a^2-2a}, +\infty)$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	单调递减	极小值	单调递增

函数 $f(x)$ 在区间 $(0, a-2 + \sqrt{a^2-2a})$ 单调递减, 在区间 $(a-2 + \sqrt{a^2-2a}, +\infty)$ 上单调递增.

(III) 由 (II) 知, 当 $a=2$ 时, $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增;

所以 $f(x) = \ln(1+x) - \frac{2x}{x+2} > f(0) = 0$,

即 $\frac{2x}{x+2} < \ln(1+x)$ 对任意 $x \in (0, +\infty)$ 成立.

取 $x = \frac{1}{k}$, $k=1, 2, 3, \dots, n$, 得 $\frac{2}{k+2} < \ln(1 + \frac{1}{k})$,

即 $\frac{2}{2k+1} < \ln(k+1) - \ln k$, $k=1, 2, 3, \dots, n$. 将上述 n 个不等

式求和, 得到: $\sum_{k=1}^n \frac{2}{2k+1} < \sum_{k=1}^n [\ln(k+1) - \ln k]$,

即不等式 $\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n+1} < \ln\sqrt{n+1}$ 对任意 $n \in \mathbf{N}^*$ 成立.

注: 第 (III) 问中需要令参数 $a=2$ 即可构造不等式求解

【例题2】 函数 $f(x) = \begin{cases} a \ln(x+1), & x \geq 0 \\ \frac{1}{3}x^3 - ax, & x < 0 \end{cases}$, $g(x) = e^x - 1$.

(I) 当 $a>0$ 时, 求函数 $f(x)$ 的极值;

(II) 当 a 在 R 上变化时, 讨论函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象公共点的个数;

(III) 求证: $\frac{1095}{1000} < \sqrt[10]{e} < \frac{3000}{2699}$. (参考数据: $\ln 1.1 \approx 0.0953$)

试题解析: (I) 解: 当 $x \geq 0$ 时, $a > 0$, $f'(x) = \frac{a}{x+1} > 0$, $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 递增

当 $x < 0$ 时, $f'(x) = x^2 - a$, $x \in (-\sqrt{a}, 0)$ $f'(x) < 0$, $f(x)$ 递减, $x \in (-\infty, -\sqrt{a})$ $f'(x) > 0$, $f(x)$ 递增; 故 $f(x)$ 在 $(-\infty, -\sqrt{a})$, $[0, +\infty)$ 递增, $(-\sqrt{a}, 0)$ 递减, (不必说明连续性)

故 $[f(x)]_{\text{极小值}} = f(0) = 0$, $[f(x)]_{\text{极大值}} = f(-\sqrt{a}) = \frac{2}{3}a\sqrt{a}$.

(II) 解: 即讨论 $h(x) = g(x) - f(x)$ 的零点的个数,

$h(0) = 0$, 故必有一个零点为 $x=0$.

① 当 $x > 0$ 时, $h(x) = g(x) - f(x) = e^x - 1 - a \ln(x+1)$,

$h'(x) = e^x - \frac{a}{x+1}$

(i) 若 $a \leq 1$, 则 $\frac{a}{x+1} < 1 < e^x$, $h'(x) > 0$, $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 递增, $h(x) > h(0) = 0$, 故此时代 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 无零点;

(ii) 若 $a > 1$, $h'(x) = e^x - \frac{a}{x+1}$ 在 $(0, +\infty)$ 递增, $h'(x) > h'(0) = 1 - a$, $1 - a < 0$

且 $x \rightarrow +\infty$ 时, $h'(x) \rightarrow +\infty$, 则 $\exists x_0 \in (0, +\infty)$ 使 $h'(x_0) = 0$, 进而 $h(x)$ 在 $(0, x_0)$ 递减, 在 $(x_0, +\infty)$ 递增, $h(x_0) < h(0) = 0$, 由指数、对数函数的增长率知, $x \rightarrow +\infty$ 时 $h(x) \rightarrow +\infty$, $h(x)$ 在 $(x_0, +\infty)$ 上有一个零点, 在 $(0, x_0]$ 无零点, 故 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 有一个零点.

② 当 $x < 0$ 时, $h(x) = g(x) - f(x) = e^x - 1 - \frac{1}{3}x^3 + ax$, $h'(x) = e^x - x^2 + a$,

设 $\theta(x) = h'(x)$, $\theta'(x) = e^x - 2x > 0$ 对 $x < 0$ 恒成立,

故 $h'(x) = e^x - x^2 + a$ 在 $(-\infty, 0)$ 递增, $h'(x) < h'(0) = 1 + a$, 且 $x \rightarrow -\infty$ 时, $h'(x) \rightarrow -\infty$;

(i) 若 $1 + a \leq 0$, 即 $a \leq -1$, 则 $h'(x) < h'(0) = 1 + a \leq 0$, 故 $h(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 递减, 所以 $h(x) > h(0) = 0$, $h(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 无零点;

(ii) 若 $1 + a > 0$, 即 $a > -1$, 则 $\exists x_0 \in (-\infty, 0)$ 使 $h'(x_0) = 0$, 进而 $h(x)$ 在 $(-\infty, x_0)$ 递减, 在 $(x_0, 0)$ 递增, $h(x_0) < h(0) = 0$ 且 $x \rightarrow -\infty$ 时, $h(x) = (e^x - 1) - \frac{1}{3}x(x^2 - 3a) \rightarrow +\infty$, $h(x)$ 在 $(-\infty, x_0)$ 有一个零点, 在 $[x_0, 0)$ 无零点, 故 $h(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 有一个零点.

综合①②, 当 $a \leq -1$ 时有一个公共点; 当 $-1 < a \leq 1$ 时有两个公共点; 当 $a > 1$ 时有三个公共点

(III) 由 (II) 知, $a=1$ 时, $g(x) > f(x)$ 对 $x > 0$ 恒成立, 即 $e^x > 1 + \ln(x+1)$

令 $x = \frac{1}{10}$, 则 $e^{\frac{1}{10}} > 1 + \ln 1.1 \approx 1.0953 > \frac{1095}{1000}$

由 (II) 知, 当 $a=-1$ 时, $g(x) > f(x)$ 对 $x < 0$ 恒成立,

即 $e^x > \frac{1}{3}x^3 + x + 1$ 令 $x = -\frac{1}{10}$, 则 $e^{-\frac{1}{10}} > \frac{1}{3}(-\frac{1}{10})^3 - \frac{1}{10} + 1 = \frac{2699}{3000}$,

故有 $\frac{1095}{1000} < \sqrt[10]{e} < \frac{3000}{2699}$

注: 在第 (III) 问中需要分别令参数 $a = \pm 1$ 即构造不等式求解

评析: 以上问题在高考试题中经常出现, 在此类问题中, 前 (I) 问或 (II) 问中常考查参数的分类讨论, 在解决后面问题时需要构建不等式, 此时可以考虑利用前面问题得到的结论对参数取特殊值进行求解.

总结: 导数是研究函数图像和性质的基本工具. 利用导数求参数的取值范围问题, 是高考考察的重点和热点, 导数是学习高等数学的基础, 对中学生来说运算量大, 思维要求高, 呈现的题型既有灵活多变的客观性试题, 又有具有一定能力要求的主观性试题, 这要求学生解题时要掌握基本题型的解法, 树立利用导数处理问题的意识.

通过对导数的教学讲解, 能够让学生初步理解利用导数解决不等式恒成立问题, 零点问题的基本方法并试着应用. 通过对不等式恒成立问题, 零点问题的具体解决, 感受导数的工具性作用, 巩固求函数单调区间, 极值, 最值的方法. 通过学习培养善于思考, 分类讨论, 化归转化的数学思想在解题时的应用.

参考文献

[1] 吴爽. 高中数学例题解答中导数的典型性应用研究[J]. 数学学习与研究, 2018(14): 128.

[2] 李丁, 李永亮. 导数在高中数学题目解答中的典型性应用分析[J]. 数学学习与研究, 2018(04): 124.