

# 直角坐标系下二重积分的几种简便计算方法

孙晓斐

(石河子大学师范学院 新疆 石河子 832099)

**摘要** 二重积分可用于求解空间立体体积和曲面面积,它在物理、化学等学科有着广泛的应用。尤其在物理力学中,二重积分有着不可替代的作用。研究二重积分的计算方法,并进行计算的简化可以给二重积分的应用带来方便。计算二重积分的常规算法是:将其化成累次积分再进行计算。在化成累次积分时,积分顺序的选取非常重要,这是简化运算过程中非常重要的一个方面。但是,将二重积分转化为累次积分这一过程很繁琐,若从积分区域的对称性和被积函数的奇偶性入手,也可以进行二重积分的简便计算。所以,本文从这两个方面来看直角坐标系下的二重积分的简便计算方法。

**关键词** 积分顺序; 对称性; 奇偶性

## 一、二重积分转化为累次积分,恰当选取积分顺序

根据积分区域以及被积函数把二重积分转化为累次积分时,需要考虑积分顺序的选取。用D表示积分区域,按照积分顺序的不同,则可以分为X型和Y型区域。积分顺序的不同可能导致计算难度的不同,也可能仅有一种积分顺序可以算出结果而另一种顺序算不出,所以要恰当选择积分顺序来进行二重积分的运算。

例1 计算  $\iint_D \frac{x^2}{y^2} d\sigma$ , 其中D由  $y=2, y=x$  及  $xy=1$  所围闭区域。

解: 画出积分区域D的图形, 求出各个交点。

三个交点分别为  $(\frac{1}{2}, 2), (1, 1), (2, 2)$

(1) 若把D看做Y型区域

$$D: \begin{cases} 1 \leq y \leq 2 \\ \frac{1}{y} \leq x \leq y \end{cases}$$

从而

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{x^2}{y^2} d\sigma &= \int_1^2 dy \int_{\frac{1}{y}}^y \frac{x^2}{y^2} dx = \int_1^2 \frac{1}{y^2} \left[ \frac{x^3}{3} \right]_{\frac{1}{y}}^y dy \\ &= \frac{1}{3} \int_1^2 \left( y - \frac{1}{y^3} \right) dy = \frac{1}{3} \left[ \frac{y^2}{2} + \frac{1}{4y^4} \right]_1^2 = \frac{81}{192} \end{aligned}$$

(2) 若把D看做X型区域

D可以分成两部分,  $D=D_1 \cup D_2$

$$D_1: \begin{cases} \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{x} \leq y \leq 2 \end{cases}$$

$$D_2: \begin{cases} 1 \leq x \leq 2 \\ x \leq y \leq 2 \end{cases}$$

从而

$$\iint_D \frac{x^2}{y^2} d\sigma = \iint_{D_1} \frac{x^2}{y^2} d\sigma + \iint_{D_2} \frac{x^2}{y^2} d\sigma = \int_{\frac{1}{2}}^1 dx \int_{\frac{1}{x}}^2 \frac{x^2}{y^2} dy + \int_1^2 dx \int_x^2 \frac{x^2}{y^2} dy = \frac{81}{192}$$

根据以上计算可知, 先积x后积y或是先积y后积x, 两种方法都能积出来, 但是计算难度不一样: 一种计算简便另一种较为复杂。因此, 计算二重积分时, 要恰当选取积分顺序, 以便简化计算。

例2 计算  $I = \iint_D x^2 e^{-y^2} dx dy$ , 其中D为  $x=0, y=1, y=x$  围成的区域。

解: 画出积分区域D, 求出各个交点, 显然区域D既是X型区域又是D型区域。

(1) 若把积分区域看成X型区域, 则

$$I = \iint_D x^2 e^{-y^2} dx dy = \int_0^1 dx \int_x^1 x^2 e^{-y^2} dy = \int_0^1 x^2 dx \int_x^1 e^{-y^2} dy$$

在计算  $\int_0^1 x^2 dx \int_x^1 e^{-y^2} dy$  时, 由于  $\int_x^1 e^{-y^2} dy$  无法用初等函数表示, 所以积分值无法算出。

(2) 若把积分区域看成D型区域, 则

$$\begin{aligned} I &= \iint_D x^2 e^{-y^2} dx dy = \int_0^1 dy \int_0^y x^2 e^{-y^2} dx = \int_0^1 e^{-y^2} dy \int_0^y x^2 dx \\ &= \frac{1}{3} \int_0^1 y^3 e^{-y^2} dy = \frac{1}{6} \int_0^1 y^2 e^{-y^2} d(y^2) = \frac{1}{6} - \frac{1}{3e} \end{aligned}$$

根据以上计算可知, 先积x后积y或是先积y后积x, 两种方法有可能仅有一种能积出来。因此, 计算二重积分时, 要恰当选取积分顺序, 一种积分顺序计算不出来时, 改变运算顺序可能能够得到答案。此时, 就不能够靠交换积分顺序来简化计算了。

## 二、利用积分区域的对称性及被积函数的奇偶性计算特殊的二重积分

利用积分区域的对称性及被积函数的奇偶性计算二重积分和定积分的计算一

样, 对积分区域具有一定的对称性且被积函数为奇函数或偶函数的二重积分, 利用对称性可以极大的简化二重积分的计算过程。当积分区域不具有对称性时, 我们可以尝试着将区域划分为几个部分, 使其中的某些部分具有对称性, 这样就可以将原积分分成几部分分别计算, 从而达到简化整个积分计算的目的。

定理:

(1) 当积分区域D关于y轴对称, 被积函数  $f(x, y)$  在D上连续时,

(i) 若被积函数为关于x的奇函数且  $(x, y) \in D$ , 则  $\iint_D f(x, y) d\sigma = 0$ ;

(ii) 若被积函数为关于x的偶函数且  $(x, y) \in D$ , 则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = 2 \iint_{D_1} f(x, y) d\sigma, \text{ 其中 } D_1 \text{ 为 } D \text{ 中位于 } y \text{ 轴右半部分区域。}$$

(2) 当积分区域D关于x轴对称, 被积函数  $f(x, y)$  在D上连续时,

(i) 若被积函数为关于y的奇函数且  $(x, y) \in D$ , 则  $\iint_D f(x, y) d\sigma = 0$ ;

(ii) 若被积函数为关于y的偶函数且  $(x, y) \in D$ , 则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = 2 \iint_{D_2} f(x, y) d\sigma, \text{ 其中 } D_2 \text{ 为 } D \text{ 中位于 } x \text{ 轴上半部分区域。}$$

(3) 当积分区域D关于原点对称, 被积函数  $f(x, y)$  在D上连续时,

(i) 若被积函数为关于x,y的奇函数且  $(x, y) \in D$ , 则  $\iint_D f(x, y) d\sigma = 0$ ;

(ii) 若被积函数为关于x,y的偶函数且  $(x, y) \in D$ , 则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = 2 \iint_{D_1} f(x, y) d\sigma = 2 \iint_{D_2} f(x, y) d\sigma;$$

所以, 要想正确利用积分区域的对称性简化运算, 既要考虑区域是否关于x,y轴对称, 还要考虑被积函数在该区域上的奇偶性, 从而正确迅速地得出结果。下面几道例题可以通过积分区域的对称性及被积函数的奇偶性来简化运算。

例3 计算  $\iint_D (y^2 \sin x + y^3 e^x + 4) dx dy$  其中积分区域  $D: x^2 + y^2 \leq 4$ 。

解: 由于积分区域D关于x轴和y轴对称, 且被积函数  $y^3 e^x$  为关于y的奇函数,  $y^2 \sin x$  为关于x的奇函数,

$$\text{则 } \iint_D y^3 e^x dx dy = 0, \quad \iint_D y^2 \sin x dx dy = 0 \text{ 于是}$$

$$\begin{aligned} \iint_D (y^2 \sin x + y^3 e^x + 4) dx dy &= \iint_D y^2 \sin x dx dy + \iint_D y^3 e^x dx dy \\ &+ \iint_D 4 dx dy = 0 + 0 + \iint_D 4 dx dy = 4 \cdot 4\pi \end{aligned}$$

根据以上计算可知, 当积分区域为对称区域时考虑被积函数的奇偶性可以极大地简化运算。所以, 当积分区域为对称区域时, 一定要检验被积函数或被积函数的某一部分是否对某一变量具有奇偶性, 尤其是对奇函数的部分。在使用合理的情况下, 对称性能极大的减少计算量。

例4 计算二重积分  $\iint_D y^3 \cos x dx dy$  其中D是由  $y=x^3, y=x$  围成的区域。

解: 显然积分区域关于原点对称, 被积函数  $y^3 \cos x$  为奇函数, 所以可得  $\iint_D y^3 \cos x dx dy = 0$

所以这道题利用积分区域的对称性及被积函数的奇偶性可以直接口算出答案, 从而极大地简化了运算。

例5 设D是xOy平面上以点(1,1), (-1,1)和(-1,-1)为顶点的三角形区域, 求  $\iint_D (xy + \cos x \sin y) dx dy$ 。

如图所示, 积分区域既不关于x轴对称, 也不关于y轴对称, 但我们可以通过划分区域, 使区域具有对称性。

解: 将区域D划分为  $D_1$  和  $D_2$ , 则  $D_1$  和  $D_2$  分别关于x轴和y轴对称。由于被积函数中的  $xy$  在区域  $D_1$  上是关于变量y的奇函数,

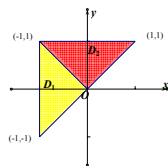
在区域  $D_2$  上是关于变量  $x$  的奇函数； $\cos x \sin y$  在区域  $D_1$  上是关于变量  $y$  的奇函数，在区域  $D_2$  上是关于变量  $x$  的偶函数。从而，  

$$\iint_{D_1} xy dx dy = 0, \iint_{D_2} xy dx dy = 0, \iint_{D_1} \cos x \sin y dx dy = 0, \iint_{D_2} \cos x \sin y dx dy = 2 \iint_{D_3} \cos x \sin y dx dy$$
 ，（其中  $D_3$  为  $D_2$  在  $y$  轴右侧部分），所以，  

$$\iint_D (xy + \cos x \sin y) dx dy = \iint_{D_1} xy dx dy + \iint_{D_2} \cos x \sin y dx dy + \iint_{D_3} \cos x \sin y dx dy = 2 \iint_{D_3} \cos x \sin y dx dy = 2 \int_0^1 dy \int_0^1 \cos x \sin y dx =$$

$2 \int_0^1 \sin^2 y dy = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2$  根据以上计算可知，在计算二重积分时，首先画

出积分区域然后细心观察积分区域图形，确定积分区域是否具备对称性，若不对称是否可以将其积分区域进行划分，变不对称为对称，然后利用积分的可加性将被积函数进行合理的拆分、组合，有意识地应用二重积分的积分区域的对称性和被积函数的奇偶性，从而大大减少计算量，做到简化二重积分的计算，优化解题方法。



## 有效积累，助力学生习作表达

李淑琴

（重庆市长寿区第二实验小学 重庆 长寿 401220）

**【摘要】** 丰富学生的语言积累，提高学生的习作能力，这是当前小学语文教学不容忽视的一个重要目标。《语文课程标准》明确提出“具有独立阅读能力，有较丰富的积累，能具体明确、文从字顺地表达自己的见闻、体验和想法。”积累语言是个长期过程，很难做到一蹴而就，只有“厚积”才能“薄发”。在语文教学中，我们应该重视培养学生良好的积累习惯，立足于课内，着眼于课外，引导学生有效积累，最终为提高学生的写作水平奠定坚实的基础。

**【关键词】** 积累；助力学生习作

### 一、立足课堂，有效积累

《教育心理学》指出：“在儿童的记忆仓库中，丰富的语言材料的储备，是理解和运用语言能力的必要条件，也是提高思维能力和智能活动水平的基础。这个‘储备’的手段，就是背诵。不背诵是不会将规范的书面语言‘植入’记忆的仓库，内化为自己的语言的。”教材是学生学习的极好材料，课例中优美的语言，写作技巧、表达方式等，这些都是学生必须学会和掌握的。古人云：“书读百遍，其义自见”是很有道理的，课堂上反复阅读、背诵，使学生无形之中积累了丰富的词汇和写作技能。

《匆匆》是现代著名作家朱自清的一篇脍炙人口的散文。文章紧紧围绕着“匆匆”二字，细腻地刻画了时间流逝的踪迹，表达了作者对虚度时光感到无奈和惋惜。全文语言优美，内容趣味性强，运用了大量对比，比喻，排比，拟人的修辞手法，语言生动具体。而且大多数句子都是一些短句，适合朗读、背诵，值得积累。

教学中，重点引导学生深入地读，富有个性地悟，结合自己内心的情感体验去读，去倾听，倾听作者的彷徨，倾听作者的无奈，倾听作者的伤感……及对人生的思索。让学生在阅读中揣摩，在阅读中体会，在阅读中领悟，在交流和讨论中说出自己的看法，作出自己的判断，积累其优美的语言，体会其浓厚的情感，并结合实际练习仿写片段，从而与作者产生共鸣，达到积累与运用的有机结合。一课教完，学生也积累许多好词佳句、掌握了一些表达方法，为写作能力的提高打下了基础。在习作《舞狮“大会”》中，顾鑫同学这样写到：接着，老师给我们表演了一段舞狮，只见那头狮子时而张开血盆大口，仿佛要把我们吞如腹中，女生们吓得连连后退；时而摆出威武的姿态，向我们炫耀、示威；时而转过身子，将屁股摇来晃去，和我们嬉戏、玩耍，我们看得津津有味，连连叫好。描写细腻、生动，读来有身临其境之感。

### 二、诵读经典，强化积累

所谓“书到用时方恨少”，这“少”字的含义有二：一是读的少，二是记住的少。语文教学中，要让学生多读点，多积累些，天长日久，待到说话作文时便能呼之即出，信手拈来。我们利用晨诵、课前提、午读等时间指导学生熟读、背诵、积累《中华诵读经典诵读》，小学一至六年级必背的古诗词及经典名句。“好记性不如烂笔头”，我们每个学生都有一个积累本，每周一到周五按要求积累相关内容：歇后语、诗词、成语、名言……并要求学生熟读、理解、背诵，学习对子、组长定时检查，有时还组织积累比赛，日积月累，学生的语言储备越来越丰富，习作中也能不时冒出些好词佳句。如：眼睛的地位养尊处优，上有眉毛为她遮风挡雨，旁有耳朵为她探听情况，下有鼻子、嘴巴为她层层把关。都说“眼睛是心灵的窗户”，是她让人们看到了柳绿花红、小桥流水；是她让人们学会了各种知识；是她让人们有

### 三、总结

在进行二重积分问题的计算时，首先要观察积分区域以及被积函数，若积分区域具有对称性，被积函数具备奇偶性计算将会大大简化，但不要忽略隐形的积分区域的对称性，遇到这种积分区域要把积分区域进行划分使其具备对称性，所以在解题过程中要具备应用对称性的这种意识，能够在面对一些不具有对称性的积分区域时对其进行人为加工使其具备对称性，灵活的简化计算。当然，还要注意累积积分的计算顺序，恰当的选取适当的顺序可以大大的简化计算，减少计算量，优化解题方法，以快速解题。

### 参考文献

- [1] 雍龙泉. 直角坐标系下二重积分的计算方法研究[J]. 湖北工程学院学报, 2019, 39(06): 106-108.
- [2] 白旭亚. 利用对称性计算二重积分的应用[J]. 智库时代, 2019(21): 276-277.
- [3] 郑剑平. 计算二重积分的几种简便方法[J]. 赤峰学院学报(自然科学版), 2019, 35(05): 7-9.

了生命的保障...没有她，我们的世界将一片黑暗。

### 三、课外阅读，多角度积累

“读书破万卷，下笔如有神”一语道出了提高写作能力必须更多的读书。课外阅读可以扩大阅读量，让学生学习课堂中学不到的知识，拓宽知识面，可以让学生从不同的角度进行积累，可以提高学生的阅读、写作能力。进行课外阅读重要的是养成良好阅读的习惯，有了阅读的习惯和方法，学生就能从广泛的课外书籍中积累语言材料。孩子们每天至少阅读三十分钟以上的课外书，并定期交流、汇报，做阅读小报，多数学生已养成习惯，读书的积极性高涨，已收到良好的效果。在日记中，他们常常把自己的阅读感受和见解表达出来与大家分享。小翔曾这样评价：诸葛亮上知天文，下知地理，更识人，他运用计谋，巧用大雾，不但使曹军损失上十万支箭，还成功挫败了周瑜的谋害。他知道周瑜让他借箭的真正目的，但为了保证双方得利益，便运用自己的智慧，使得周瑜无话可说，只能甘拜下风。实在令人佩服！

### 四、坚持日记，运用积累

在《语文课程标准》的各学段目标中都提到：“在写话习作中运用自己积累的语言材料。”学生有意识地在运用已有的积累语言，是深化积累的最佳方法。

坚持写日记是积累语言的最好方式，也是练笔的最佳途径，由于日记的内容很广，可写听到的、看到的、也可写想到的。叶老曾说：“惟有从生活中多方面去体验，把社会所得一点一点地积累起来，积累得多了，了解才越见深切。”这句话，道出了生活实践对语言积累的深刻影响。所以，要培养学生善于观察生活，乐于记录生活的好习惯，帮助学生在脑海中不断积累多种表象。首先教师要指导学生从不同角度，不同侧面去观察生活，做生活中的有心人，培养留心周围事物和养成写日记的良好习惯。其次把发现的生活中闪光的东西，通过描绘、叙述等形式，呈现在日记中。教学中，充分尊重学生的个性化表述：题目自拟，内容自选，让学生自由表达和有创意的表达。孩子们坚持练习写日记，从中收获了许多喜悦和成功。一次，我们写一个熟悉的同学：聪明能干、幽默风趣的秋实、热心助人的小胖子鹏超、酷爱阅读的“墨香肉枕头”康婷、运动健将孙婕等个性鲜明的同学形象便跃然纸上，读来感觉亲切自然，活灵活现。

作为语文教师，我们要利用多种形式调动学生积累语言的积极性，逐渐养成积累语言的习惯，让丰富的语言积累成为学生乐于习作、表达的原动力！

### 参考文献

- [1] 激兴趣促积累明方法——关于小学习作教学的几点思考[J]. 林馨. 华夏教师. 2018(30)
- [2] 小学语文阅读教学的提升策略[J]. 李慧慧. 课程教育研究. 2018(38)