关于积分对称性的应用
——《工科数学》课程教学实践

张新锋
（西安欧亚学院　陕西　西安　710065）

[摘　要] 本文系统阐述了定积分、重积分、曲线积分、曲面积分的奇偶对称性和轮换对称性的重要结论，通过举例说明，利用积分的对称性对简化积分的计算有着奇特的作用。

[关键词] 积分；对称性；应用

在求解和计算积分问题时，善于发现和利用积分的对称性，能够极大地简化积分的计算，降低运算量，往往会起到事半功倍的效果。特别说明，本文中所有被积函数、积分区间（或积分曲线，积分曲面、积分区域）均满足可积条件.

一、定积分的奇偶对称性

结论1.1　设函数 $f(x)$ 在 $[-a,a](a>0)$ 上可积，则 $\int_{-a}^{a}f(x)dx=0$（$f(x)$为奇函数）；$\int_{-a}^{a}f(x)dx=2\int_{0}^{a}f(x)dx$（$f(x)$为偶函数）.

例 计算定积分 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\frac{\sin x}{1+\cos x}+|x|)dx$.

解：由于 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 为对称区间，明显可知 $\frac{\sin x}{1+\cos x}$ 是奇函数，$|x|$ 是偶函数，所以，根据结论

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\frac{\sin x}{1+\cos x}+|x|)dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+\cos x}dx\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|x|dx=0+2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}|x|dx=2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}xdx=\frac{\pi^2}{4}.$$

二、二重积分的奇偶对称性与轮换对称性

结论2.1 设 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续，若 D 关于 x 轴对称，则

$$\iint_D f(x,y)d\sigma=\begin{cases}0, & f(x,y)\text{关于}y\text{为奇函数}\\ 2\iint_{D_1}f(x,y)d\sigma, & f(x,y)\text{关于}y\text{为偶函数}\end{cases}$$

其中 D_1 为 D 在 x 轴的上半平面部分；如果 D 关于 y 轴对称，也有类似的结论.

结论2.2　设 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续，若 D 关于原点对称，D_2 为 D 在第一象限的部分则

$$\iint_D f(x,y)d\sigma=\begin{cases}0, & f(-x,-y)=-f(x,y),(x,y)\in D,\\ 4\iint_{D_2}f(x,y)d\sigma, & f(-x,-y)=f(x,y),(x,y)\in D,\end{cases}$$

结论2.3（轮换对称性）　设 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续，若 D 关于直线 $y=x$ 对称，

则 $\iint_D f(x,y)d\sigma=\iint_D f(y,x)d\sigma=\frac{1}{2}\iint_D[f(y,x)+f(x,y)]d\sigma$；

若 $D=D_3\cup D_4$，D_3，D_4 分别为 D 在 $y=x$ 的上方与下方部分，

则 $\iint_{D_3}f(x,y)d\sigma=\iint_{D_4}f(y,x)d\sigma$

例　设区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1\}$，计算 $\iint_D(x^2-y)dxdy$.

解　根据积分性质 $\iint_D(x^2-y)dxdy=\iint_D x^2dxdy-\iint_D ydxdy$.

由于积分区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1\}$ 关于x轴对称，而 $f(x,-y)=-y=-f(x,y),\ f(x,y)=y,$

所以，$\iint_D ydxdy=0$，则有，$\iint_D(x^2-y)dxdy=\iint_D x^2dxdy$.

又由于D关于直线 $y=x$ 对称，根据轮换对称性，有

$$\iint_D y^2dxdy=\iint_D x^2dxdy.$$

所以，$\iint_D x^2dxdy=\frac{1}{2}\iint_D(x^2+y^2)dxdy=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r^3dr=\frac{\pi}{4}$.

三、三重积分的奇偶对称性与轮换对称性

结论3.1　设Ω为 R^3 中关于xoy平面对称的有界闭区域，$f(x,y,z)$ 为Ω上的连续函数，则

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)dv=\begin{cases}0, & f(x,y,z)\text{关于}z\text{为奇函数}\\ 2\iiint_{\Omega_1}f(x,y,z)dv, & f(x,y,z)\text{关于}z\text{为偶函数}\end{cases}$$

其中 Ω_1 为Ω在xoy平面上半平面的部分；若Ω关于xoz平面、yoz平面对称亦有类似结论.

结论3.2（轮换对称性）　设 $f(x,y,z)$ 在有界闭区域Ω上连续，Ω对坐标x，y，z具有轮换对称性，则

$$\iiint_D f(x,y,z)dv=\iiint_D f(y,z,x)dv=\iiint_D f(z,x,y)dv$$

例　计算 $\iiint_\Omega z^2dxdydz$，其中 $\Omega=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\le 1\}$.

解：由轮换对称性可知，

$\iiint_\Omega z^2dxdydz=\iiint_\Omega x^2dxdydz=\iiint_\Omega y^2dxdydz$，故 $\iiint_\Omega z^2dxdydz$

$$=\frac{1}{3}\iiint_\Omega(x^2+y^2+z^2)dxdydz=\frac{1}{3}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^1 r^2\cdot r^2\sin\varphi dr=\frac{2\pi}{15}\int_0^{\pi}\sin\varphi d\varphi=\frac{4\pi}{15}.$$

四、曲面积分的对称性

1、对面积的曲面积分奇偶对称性与轮换对称性

结论5.1.1　设积分曲面Σ关于xoy面对称，则

$$\iint_\Sigma f(x,y,z)ds=\begin{cases}0, & \text{当}f(x,y,z)\text{关于}z\text{是奇函数}\\ 2\int_{\Sigma_1}f(x,y)ds, & \text{当}f(x,y,z)\text{关于}z\text{是偶函数}\end{cases}$$

其中 Σ_1 是Σ在xoy面、yoz面对称，也有类似结论.

结论5.1.2（轮换对称性）设曲面Σ为光滑曲面，Σ对坐标x,y,z具有轮换对称性，$f(x,y,z)$ 在Σ上连续，则

$$\iint_\Sigma f(x,y,z)ds=\iint_\Sigma f(y,x,z)ds=\iint_\Sigma f(z,x,y)ds$$

2、对坐标的曲面积分奇偶对称性与轮换对称性

结论5.2.1如果曲面Σ关于xoy面对称,则

$$\iint_\Sigma P(x,y,z)dxdz=\begin{cases}0, & \text{当}f(x,y,z)\text{关于}z\text{是偶函数}\\ 2\int_{\Sigma_1}P(x,y,z)dxdz, & \text{当}f(x,y,z)\text{关于}z\text{是奇函数}\end{cases}$$

其中 Σ_1: $z=z(x,y)\ge 0$；如果曲面Σ关于xoz面、yoz面对称，也有类似结论.

结论5.2.2　设光滑曲面Σ关于坐标原点面对称，则

$$\iint_\Sigma f(x,y,z)dydz=\begin{cases}0, & \text{当}f(x,y,z)=f(-x,-y,-z)\\ 2\int_{\Sigma_1}f(x,y)dydz, & \text{当}f(x,y,z)=-f(-x,-y,-z)\end{cases}$$

其中 Σ_1 是Σ的一个对称部分.

结论5.2.3（轮换对称性）设曲面Σ为光滑的有向曲面，Σ对坐标x,y,z具有轮换对称性，$f(x,y,z)$ 在Σ上连续，则

$$\iint_\Sigma f(x,y,z)dydz=\iint_\Sigma f(y,z,x)dzdx=\iint_\Sigma f(z,x,y)dxdy.$$

例5.1 计算曲面积分 $I=\iint_\Sigma(ax+by+cz+d)^2dS$，

其中Σ是球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$.

解：由奇偶对称性和轮换对称性，有$\iint_{\Sigma} x^2dS=\iint_{\Sigma} y^2dS=\iint_{\Sigma} z^2dS$，

$$\iint_{\Sigma} xdS=\iint_{\Sigma} ydS=\iint_{\Sigma} zdS=0 \quad \iint_{\Sigma} xydS=\iint_{\Sigma} xzdS=\iint_{\Sigma} yzdS=0$$

故

$$I=\iint_{\Sigma}(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2+d^2+2abxy+2acxz+2bcyz+2adx+2bdy+2cdz)dS$$

$$=d^2\iint_{\Sigma} dS+(a^2+b^2+c^2)\iint_{\Sigma} x^2dS=4\pi R^2d^2+\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)\iint_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)dS$$

$$=4\pi R^2d^2+\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)\cdot 4\pi R^2=4\pi R^2d^2+\frac{4\pi R^2}{3}(a^2+b^2+c^2)\cdot$$

例5.2 计算曲面积分 $I=\iint_{\Sigma}\frac{x}{x^2+y^2+z^2}dydz$，其中Σ是由曲面$x^2+y^2=R^2$及两平面$z=R, z=-R(R>0)$所围成的立体表面的外侧。

解：曲面积分 $I=\iint_{\Sigma}\frac{x}{x^2+y^2+z^2}dydz$，Σ的上下底均与yoz平面垂直，相应的上述积分为0，记Σ的侧面为Σ_1，Σ_2前后两块

Σ_1：$x=\sqrt{R^2-y^2}, -R\le y\le R, -R\le z\le R$（向前）

Σ_2：$x=-\sqrt{R^2-y^2}, -R\le y\le R, -R\le z\le R$（向后），则

$$I=\iint_{\Sigma_1}\frac{x}{x^2+y^2+z^2}dydz+\iint_{\Sigma_2}\frac{x}{x^2+y^2+z^2}dydz=\iint_{D_{yz}}\frac{\sqrt{R^2-y^2}}{R^2+z^2}dydz-\iint_{D_{yz}}\frac{-\sqrt{R^2-y^2}}{R^2+z^2}dydz$$

$$=2\iint_{D_{yz}}\frac{\sqrt{R^2-y^2}}{R^2+z^2}dydz=2\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-y^2}dy\int_{-R}^{R}\frac{1}{R^2+z^2}dz=\frac{\pi^2}{2}R.$$

参考文献

[1]王湘萍,浅谈对称性和奇偶性在积分学中的应用[J],数学学习与研究,2019,(22):127-128.

[2]胡维付,彭正虎,赵大方.对称性在曲面积分计算中的应用[J],科教导刊,2016,(05): 45-46.

[3]景慧丽,第一类曲面积分的计算方法探讨[J]，高等数学研究,2019,(06):10-12.

扬起自信的风帆

阮银屏

（浙江省台州市临海市临海小学 浙江 台州 317000）

[摘 要] 当今社会竞争如此激烈，一个人如果不自信是万万不行的。小学阶段是一个人良好的心理素质形成的关键时期，可此时的他们又缺乏各种经验和技巧，在与家长、老师和同学的交往以及在学习生活中都容易缺乏自信心，导致与成功失之交臂。所以我们应该去提高小学生的自信心，让他们明白自信对于一个人的重要性，并学习采用各种方法提高自信心。本课以集体心理辅导的方式，通过讨论、游戏等活动情境让学生懂得自信心对一个人的重要性并学会让自己变得自信。

[关键词] 自信；案例分析；人生观价值观

一、集体活动——游戏导入：

小朋友们，你们喜欢做游戏吗？今天老师要和大家做一个小游戏，这是游戏规则。

（课件出示游戏规则：老师说出一个特点，如果你觉得描述的是你，请站起来，如果你觉得不是你，请坐着不别动，顺便统计一下自己共站起来了几次。）

（请一学生读游戏规）

游戏开始：（老师说：我长得很帅气或我长得很漂亮；我是一个很聪明的孩子；老师挺喜欢我的；我讲文明，有礼貌；我是一个多才多艺的人；我很讲卫生；我有很多的朋友。）游戏到此结束。老师统计一下：站了5次及5次以上的请举手？3-4次的？3次以下的？

小结：同学们，从刚才的游戏统计的数据我们可以看出有不少同学认为我描述的并不是你，可你知道老师是怎么看你的吗？老师觉得我们班的男生都长得很帅气，女生都长得很漂亮，每一个同学都很聪明，而且我们班很多同学都是多才多艺，你看每年学校举行的艺术节、读书节、科技节、运动会上我们班同学的表现就是最好的证明。可为什么当我说到你们的优点的时候，大家却并不觉得就是你自己呢？因为你们不够自信（板书：自信），觉得自己这不得，那也不行。这节心理健康课就让我们一起找回自信，扬起自信的风帆，好吗？（补充板书课题：扬起自信的风帆）齐读课题！

二、集体思考——故事明理：

1、缺乏自信，远离成功。

（1）让学生观看一个小实验的视频。

同学们，现在我们来看一个实验：

（心理学家曾做了一个实验：将一只青蛙放入一个透明的水桶里。开始，青蛙一下子就能从水桶中跳出来。然后，心理学家在桶子上盖了透明盖，青蛙仍然会往上跳，但是碰了几次盖后，碰疼了，慢慢就不跳那么高了，后来心理学家又把上面的盖子掀开了……）

（2）学生讨论1：看到这里，你们猜一猜：青蛙还能跳出水桶吗？为什么？

小结：是的，青蛙失去了自信，认为跳不出水桶了。

（3）学生讨论2：看了这个视频，你觉得自信是什么？用一句话来概括

生：自信就是觉得我能行。

生：自信就是相信自己有能力做好

师小结：是的，自信是一种发自内心的自我肯定与相信，无论是在跟人的交往上、工作上还是学习上，自信都非常重要。只有相信自己能做成某件事，才会为了做成这件事去付出努力，并真的把这件事做成功。可是你们看刚才实验中的青蛙一开始是可以跳出水桶的，所以一开始它是有自信的，可为什么后来却失去了跳出水桶的自信了呢？

2、拥有自信，走近成功。

那么，拥有自信真的很重要吗？或者说它能给我们带来什么好处？下面，让我们来看一个小故事。

（1）学生阅读《奥巴马的故事》。

上世纪60年代，一个混血男孩出生在美国夏威夷的檀香山，他的父亲是肯尼亚人，母亲来自美国的一个中产家庭。男孩长大后就读于夏威夷一家私立精英小学，因为肤色问题的困扰，他在班上少言寡语。每当老师提问时，他的双腿就开始不停颤抖，说话也变得吞吞吐吐。老师无奈地告诉男孩的母亲，这个孩子连自己都不相信，将来不会有什么出息了。男孩的母亲并不认同老师的观点，她为男孩找了一份差事——课余时间在街区里挨家挨户订报纸。在母亲的鼓励下，男孩勇敢地迈出了第一步。他敲开了邻居家的门，努力地与他们沟通，征订报纸出人意料的顺利，几个邻居都成了他忠实的订户。有了挣“第一桶金”的经历，男孩从此说话不再结巴了，他从一个街区走到另一个街区，自信地敲开一家又一家的大门，订单也与日俱增，他第一次享受到了成功的喜悦。多年以后，男孩才知道，他童年时获得的“第一桶金”浸透了深深的母爱。原来，母亲早就安排好了，她自己出钱请邻居们订报纸，目的就是给儿子一份自信。成功的他握住母亲的手，任凭泪水肆意地奔流。是童年那份宝贵的自信让他一步步地走下来，成为美国首位非洲裔总统。他就是贝拉克·侯赛因·奥巴马。

（2）学生讨论1：奥巴马小时候为什么少言寡语？后来为什么又成功了？

师小结：对，自信是成功的前提，拥有自信才会让我们走向成功。

（3）学生讨论2：曾经那么不自信的小奥巴马是怎么找回自信的呢？

四人小组讨论，看看哪个小组能够在该案例中找到足够多的找回自信的方法，并把这些方法在小纸条上。写好后，贴到黑板上。

（学生在案例中找到的找回自信的方法可能有：①妈妈的鼓励让小奥巴马自信②奥巴马的努力③征订报纸出人意料的顺利给小奥巴马带来的成功体验④几个邻居成了忠实的订户给小奥巴马带来了勇气⑤可能还有在与邻居的交往中邻居给他的鼓励和表扬也增加了小奥巴马的自信）

（4）师小结：同学们找得很好。在小奥巴马从不自信到自信的过程中有一个关键人物，那就是他的妈妈，他妈妈自己出钱请邻居订报纸，让小奥巴马有了积极地与他人交往的机会，在与他人的交往中，他开始正确地认识自己，提高了自我评价，再加上妈妈和邻居们或多或少的鼓励，进而有了积极的自我暗示和自我鼓励，这一切都是良性循环的，久而久之，不自信的小奥巴马终于找回了自信。

三、集体转换——学以致用

1、同学们，如果你有以下不自信的行为，你会选用黑板上的哪种方法帮助自己找回自信？出示几种情况：

（1）老师提问时，怕自己回答错了会受到老师的批评，担心同学笑话，课堂上不敢发言。（2）不知什么原因，当众说话总觉得紧张，不知怎么说才好。（3）第次活动，总是坐在角落里，不想被别人看到。（4）不敢正视别人的眼睛，和别人说话总是低着头。（5）总是羡慕别人，总是觉得别人的比自己的好。（6）不喜欢和别人一起，总喜欢独处。

2、师小结：看来如何找回自信，同学们已经有些方法了，不过，俗话说得好，说说容易做做难，希望在行动上大家能够真的做到。

其实，自信就是一种感觉，一个人的成长和成功都离不开它，只要你学会欣赏自己、鼓励自己，扬起自信的风帆，就一定会走向成功的彼岸！

参考文献

[1]付小红.让学生扬起自信的风帆[J].科学咨询（教育科研），2018（04）：45-46.

[2]杨敏.扬起自信的风帆[J].江苏教育，2017（32）：68-69.