指向深度学习的复习课教学设计与反思

郭娟

浙江省温州市龙湾区永强中学

[摘　要]深度学习是一个动态的学习过程，是指学生通过建构数学知识体系，感悟数学思想，应用数学方法解决问题，发展或者再创造的数学过程。函数是高中数学的主干知识，在历年的浙江学考中都占较大的比重，纵观近年学考以及各地模拟试题，以二次函数为背景的绝对值最值问题是考查的热点，本文基于深度学习的微专题教学研究，以一类含绝对值二次函数的学考复习课为例，探讨以微专题为载体下的学考复习课应如何重视学生的深度参与，引领学生的深度思考，落实思想方法，促进深度学习和核心素养养成。

[关键词]深度学习；微专题；核心素养；绝对值；最值

【DOI】10.12252/j.issn.2096-6288.2020.02.576

一.引言

苏联教育家乌申斯基曾经说过："复习不是为了修补倒塌的建筑，而是为了加固原来的结构，并且建一个新楼房。"即学考复习课应从学生的现状出发，以学考考点与考题为背景，将复习课从"炒冷饭"的状态调整为丰富且生动的思想方法构建课[1]。纵观近年学考以及各地模拟试题，以二次函数为背景的绝对值最值问题是考查的热点，试题中有灵活多变的选填压轴题，也有难度颇大的解答题，蕴含了数形结合，分类讨论，转化划归等数学思想，从知识技能上讲这类题比较综合，从思想方法上说角度也多样，遇到此类问题，有的同学无从下笔的，有的同学做不到底。因此本文采取微专题的教学形式，引领学生的深度思考。微专题设计架构大致分为两类：第一类是以知识为线索，附以能力的培养，第二类是以方法为主，附以知识的应用和能力的培养.本文以知识为线索，结合一堂市直公开课，以最大值概念为载体，渗透分类讨论，数形结合转化划归的思想，引导学生从静态向动态思维的转变，逐步形成含绝对值二次函数问题的解决策略。

二.微专题课堂实录

1.思维起点，复习概念

思考：已知函数 $f(x)=x\ (x-1), x\in(0,2)$，求 $f(x)$ 的最值。

评注：课堂上思考题是学生口答，笔者选择了一个回答最大值是1的同学追问做法，该生回答"画图"，这是点睛之言，即表明高二学生具备一定的数形结合思想，在其他同学对答案提出质疑时带领同学们复习最大值的概念，为解决后面的问题做好概念铺垫，特别强调最大值与"≤"的区别是"取得到"。

2.思维深入，挖掘本质

题1：已知函数 $f(x)=x|x-1|, x\in[0,2]$，求 $f(x)$ 的最值。

变式：已知函数 $f(x)=x|x-1|, x\in[0,a]$，求 $f(x)$ 的最大值M（a）。

生1：与题1中的图一样，动a，找到 $x>1$ 的图像中函数值与 $f(\frac{1}{2})$ 相等的x，令 $x(x-1)=\frac{1}{4}$，解得 $x=\frac{1+\sqrt{2}}{2}$，分别在三种情况：$a\le\frac{1}{2}, \frac{1}{2}<a<\frac{1+\sqrt{2}}{2}, a\ge\frac{1+\sqrt{2}}{2}$ 下进行讨论。

题2：已知函数 $f(x)=x|x-a|, x\in[0,2]$，若 $f(x)$ 的最大值是1，则a=________。

生2：去绝对值得 $f(x)=\begin{cases}x(x-a) & x\ge a\\ x(a-x) & x<a\end{cases}$，作出图形，把上题绝对值内的1改为a，然后找到 $\frac{1+\sqrt{2}a}{2}$，在三种情况：$0\le 2\le\frac{a}{2}, \frac{a}{2}<2<\frac{1+\sqrt{2}a}{2}, 2\ge\frac{1+\sqrt{2}a}{2}$ 下进行讨论，解出a=$\frac{3}{2}$和2。

师：这位同学非常好的延续了上一题的方法和结论，简化了解答的过程，本题是一个区间定图像动的问题，但我们注意到在他刚才的回答中却固定了图像，让2动起来，运动本就是相对的，这个想法妙。同学们是否还有补充呢？

生3：图像不一定是这样，要考虑a<0和a=0，的情况。

师：以上两道含参数的绝对值最值问题，我们都对参数a进行了讨论，同学们能说说a影响了什么？为什么需要谈论吗？

评注：对分类讨论常因繁琐或不知如何分类而让学生"望而生畏"，因此在两道含参分类讨论问题后笔者抛出了"为什么讨论"这一问题，要回答这个问题就要知道参数究竟影响了什么，笔者认为要解决含绝对值二次函数的问题图像不可或缺，正是因为a影响了图像，所以需要对a进行讨论，题1的变式中a影响了图像所需截取的部分，题2的a是零点，零点的个数与零点a和0的大小以及区间端点2与a的关系等对图像有影响。

师：如果题目改成："已知函数 $f(x)=x|x-a|, x\in[0,2]$，若 $f(x)\le 1$ 恒成立，a的取值范围是__________。"你会如果求解呢？

同学的集体回答中，有的同学认为跟刚才一样，有人认为不一样，区别是什么？

生4：$f(x)\le 1$ 最大值不一定是1，可能取不到1。

评注：笔者课堂中对这个题目的变化一方面是想巩固最大值的定义，让学生通过具体例题区分恒成立与最大值，另一方面也想通过"恒成立"开拓学生的思维，挖掘更多的想法。于是，笔者提问学生"恒成立"能让你想到什么呢？

生5：带个数进去，$f(0)\le 1, f(2)\le 1,$ 得到 $\frac{3}{2}\le a\le\frac{5}{2}$，就可以少讨论一些情况了。

师：通过特值探路的方法缩小a的范围，进而简化讨论过程，很棒！

生6：$x|x-a|\le 1, x=0$ 成立 $x\ne 0$ 时，$x|x-a|\le 1 \Leftrightarrow |x-a|\le\frac{1}{x} \Leftrightarrow -\frac{1}{x}\le x-a\le\frac{1}{x}$，$\Leftrightarrow x-\frac{1}{x}\le a\le x+\frac{1}{x}$，接下来求出函数 $y=x-\frac{1}{x}$，$x\in(0,2]$ 的最大值 $\frac{3}{2}$ 和 $y=x+\frac{1}{x}$，$x\in(0,2]$ 的最小值2，所以 $\frac{3}{2}\le a\le 2$。

师：这位同学通过解绝对值不等式，参变分离，将问题变成a的恒成立问题，也是非常漂亮的做法，你能据此得到答题2的答案吗？

学生得到答案 $\frac{3}{2}$ 和2，笔者追问为什么只取区间端点？

评注：笔者这一追问的目的是进一步加深学生对最大值

的理解，强调“取得到”，同时引导学生从图像角度思考这个问题的本质，即y=a图像夹在函数 $y=x+\frac{1}{x},x\in(0,2]$ 与 $y=x+\frac{1}{x}$，$x\in(0,2]$ 中间（如下图1），取得最值时必与其中之一有交点，而这种“夹逼”恰到好处的开拓了学生的思维，更上一个台阶。

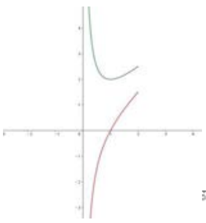

图1

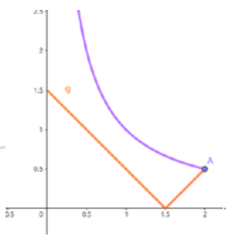

图2

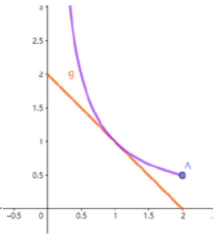

图3

生7：$|x-a|\le\frac{1}{x},x=0$ 这一步可以直接作图，一个V型（图2）和一个双曲线（图3）的部分，V型比双曲线低，取最值要有交点。

这位同学提供了新的思路，同学们纷纷尝试作图，笔者继续追问，何时取最值。

评注：笔者通过GeoGebra动态展示图像随着a的变化过程，并引导学生找出取得最大值的位置，即y=a-x过点 $(2,\frac{1}{2})$ 和y=a-x与 $y=\frac{1}{x}$ 相切，进一步发现取最值时x=1和x=2，这与分类讨论方法的结果一致，也实现了数与形的完美统一。同时，转化划归数学思想的落地，将问题转化为两个熟悉的函数让原本望而生畏的同学看到了希望和曙光，感叹试试就能行，从陌生到熟悉，从逃避到尝试，这对数学薄弱的同学来说无疑是一大跨越，对于成绩优秀的同学来说，一题多解，触类旁通，以学生为主体的模式也大大提升了他们的自信心。

3.延续 感悟本质

题3：（2018年4月浙江学考）已知函数 $f(x)=2x^2-(x-a)|x-a|-2$，若 $f(x)$ 的最小值是0，则a=______。

题3是在多种方法解决题2后的对所学方法的应用，无论是课堂还是考试，时间都是紧迫的，选择恰当方法，优化解决策略至关重要，题3可以说是题目深度的升华也可以说是思想方法的检验，以下方法来自于课堂的实况。

生8：作出函数 $y=2x^2-x$ 与 $y=(x-a)|x-a|$ 的图像，$y=2x^2-x$ 图像在 $y=(x-a)|x-a|$ 的上方，再找到有交点的边界位置。

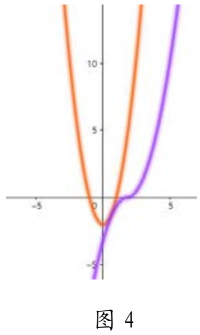

图 4

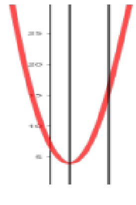

图 5

$y=(x-a)|x-a|$ 的图像对同学们来说有些难度，笔者适时给与点拨和引导，并追问，什么时候取得最小值？学生很快发现当 $y=2x^2-2$ 与 $y=-(x-a)^2$ 相切时取得最值，并计算求得此时 $a=\sqrt{3}$，切点是（$\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{4}{3}$）。如下图（图4）：

生9：$f(0)=a|a|-2\ge 0$ 解得 $a\ge\sqrt{2}$ 然后再去掉绝对值分类讨论。

课堂上该同学没有完成全部讨论，笔者带领学生一起分析 $f(x)=\begin{cases}x^2+2ax-a^2-2,x\ge a\\3x^2-2ax+a^2-2,x<a\end{cases}$，当 $a\ge\sqrt{2}$ 时，两轴与分界a的大小关系是 $a>\frac{a}{3}>-a$，如图（图5），$f(x)_{\min}=f(\frac{a}{3})=\frac{a^2}{3}-2\ge 0$，解得 $a\ge\sqrt{3}$.

评注：以上两位同学提供了很好的思路，课堂上，基本上同学们都可以取去绝对值，也知道要数形结合，实际操作中仍有部分同学存在困难，这也给笔者一些思考，共富之路虽然艰难，但至少大家一起走在了共同进步的路上，这也是收获。至此，课堂时间所剩不多，笔者给出课后思考题已知函数 $f(x)=2x^2-(x-a)|x-a|-2$，若 $x\in[-1,1]$ 求 $f(x)$ 的最小值M（a），本题旨让学生思考刚才所用的半分离作两个函数图像以及特值探路缩小参数范围的方法是否适用，也为下节课重点讲解分类讨论解决，双轴单绝对值，双轴双绝对值等问题埋下伏笔。

三.反思与感悟

1.恰当选择微专题，人人都有收获

通过微专题复习促进学生深度学习，教师要围绕教材的主干知识，考试的重点难点和热点，设置一些对不同基础的学生都有所帮助的微专题，让学生通过学习走近数学本质。歌德说过“人应当相信，不了解的东西总是可以了解的，否则他就不会再去思考。”所以，问题的设计不能让学生“恐惧”，要让学生“亲近”，要似曾相识，先触手可及再跳跃可及。笔者所在的普通中学高二年级学生具备求二次函数最值，去绝对值做出简单图像等基本知识与能力储备，但是对于图像在分界点处的形态不清晰，找不到分类讨论的标准、不会讨论或者讨论不全。笔者在设计问题时回到思维的最低处，照顾到全体同学，起点低，易入手、从二次函数到绝对值，从单轴到双轴，题题相关，层层递进，让每个层次的同学在这一问题的解法上有所感悟和有通法可循，有台阶可上，胜过无路可走，一定程度上缓和薄弱学生畏难情绪，提升其自信心，也鼓舞成绩优秀的同学直挂云帆，扶摇直上，共同行走在数学的康庄大道上。

2.深度学习必须重视学生的深度思考和深度参与

切口小，针对性强，见微知著的微专题为学生深度学习提供了很好的学习平台，学生深度学习的表现之一是学生的思维深刻的融入到教学过程中，通过思考在理解性学习的基础上进行批判性学习以及知识的再创造，把学习的感受，感悟融入到自己原有的认知结构中去，提升学习能力和数学素养，深度学习也表现在学生的深度参与，每个核心素养水平的阐述，都会涉及到思维，表达与交流反思。

学习者在教师创造的自由，民主的课堂氛围中，独立思考，合作探究，踊跃发言，笔者鼓励各层次学生大胆表达自己的观点，并加以引导和修正，发展了学生的表达能力，从思考，探索，抽象，到推理论证和表达，数学素养真正的根植于心。

参考文献

[1]曾伟.以分段函数的微专题教学设计为例谈深度学习的有效方式[J].中学教研（数学），2018（02）：1-4.