对高中导数定义与极值关系的解读

陈霞

安顺市平坝区平坝第一高级中学

[摘　要]本文抓住一道月考试题，挖掘高中导函数定义考题的意图，力求回归课本，揭示教材本质。

[关键词]月考试题；导数；函数极值；充分条件；必要条件；充要条件；既不必要也不充分条件

【DOI】10.12252/j.issn.2096-6288.2020.02.1278

一、背景介绍

我是一名有11年从教经历的高中数学教师，但由于诸多的因素，只带过两轮完整的毕业生，因此我认为我的教学经历是不完全成熟的，还有更多的知识与方法需要探索与学习，本次提笔是想谈谈自己对一道月考试题涉及导函数定义理解的解读，每次提及导函数定义讲解，心中总是在纠结，因为我教授的班级水平是一半左右孩子只能上二本线，及个别孩子能上一本，所以针对对导函数定义的讲授，我都是在问自己该如何讲解为好，其中在一次测试中就很惊讶的碰到这样一道题，当时我看到时觉得整个天都塌下来了，我觉得我又没讲好，当时就想，试卷考完我该怎样给学生解释呢，试题是这样的：

（单项选择题）函数 $y=f(x)$ 在一点的导数值为0是函数 $y=f(x)$ 在这点取极值的（　　）

A　充分条件　　B　必要条件

C　充要条件　　D　既不必要也不充分条件。

二、对问题的理解与思考

考完试之后，我拿到试卷看到这道题时心理极度不安，因为这个结论在课上教材就是这么写的：“一般的，函数 $y=f(x)$ 在一点的导数值为0是函数 $y=f(x)$ 在这点取极值的必要条件，而非充分条件。”这里的这个“一般”就不好把握，在我的新授课上我就没有特别强调可导函数的条件，只是简单提了一下可导函数这一要求，所以学生都选了B选项，答案是D，例如函数y=|x|,结合函数知道它在x=0处有极小值，但它在x=0处的导数不存在，至于为何不存在我们也没有做出详细的证明讲解。而教材上下结论时并没有明文严格提到可导函数的条件，我们在普通班级授课时的要求也不太好把控这个要求，只是轻描淡写的说前提这些函数都是有导函数的，所以学生根本没有清楚的认识这个条件要求，所以学生们都选了B，后面我翻阅教参与教材，翻阅相应的辅导资料，找到类似的一道试题：已知函数 $y=f(x)$ 在定义域内可导，则函数 $y=f(x)$ 在某点处的导数为0是函数 $y=f(x)$ 在这点出取得极值的（　　）

A　充分不必要条件　B　必要不充分条件

C　充要条件　　　　D　非充分非必要条件 。

看完之后，我当时想面对我的学生该如何讲授这个问题，如果在高中导数的教学里，要和学生讨论学习函数的可导性（因为不可导函数也有极值），那这问题就大了，心里又想，教材是许多教育专家研究成果和优秀教育工作者实践经验的精辟，因此课本中的知识都是经过慎重思考，精心打磨而成的结晶，我们不能随意的增减知识，我应该怎样对导数这章节的知识进行教学呢，怎样把握这个度呢？

于是我又反复的阅读教材与教参，并与有经验的老师交流，明白其中教参对导数概念的教学有这样的说明：“一般的，导数概念学习的起点是极限，即从数列到数列的极限到函数的极限到导数。这种建立概念的方式具有严密的逻辑性和系统性，但是也产生了一些问题，就高中我面对的学生的认知水平而言，他们很难理解极限的形式化定义，由此产生的困难也影响了对导数本质的理解。因此教科书没有介绍形式化的极限定义及相关知识，而是从变化率入手，用形象直观的“逼近”方法定义导数,我是这样理解的：其一，避免学生认知水平和知识学习间的矛盾；其二将更多精历用于对导数本质的理解上；其三学生对逼近思想有了丰富的直观基础和一定的理解，有利于在大学的初级阶段学习严格的极限定义。在教学中值得注意的是，本节教科书编写的重点在于理解导数的概念和基本方法，并不追求理论上的严密性和过多的技巧，所以个人建议教学时针对自己的学生层次充分理解教科书的编写意图，将教学重点放在对导数思想及其内涵的理解上。”我反复的阅读都没有提到研究函数的可导性，我在对导数进行教学时直观提到极限存在也即函数可导，没有深入也没有不可导函数的反例举给同学们。

三、定义翻阅与解读

课程目标：微积分的创立是数学发展中的里程碑，它的发展和广泛应用开创了近代数学过渡的新时期，为研究变量和函数提供了重要的方法和手段。导数、定积分都是微积分的核心概念，他们有极其丰富的实际背景和广泛的应用。在高中数学导数章节的学习中，学生将通过大量实例，经历由平均变化率到瞬时变化率刻画现实问题的过程，理解导数概念，了解导数在研究函数的单调性，极值等性之中的作用，学生还将经历求曲边梯形的面积、汽车行驶的路程等实际问题的过程，初步了解定积分的概念，为以后进一步学习微积分打下基础，通过高中对导数的学习，学生将体会导数的思想极其丰富的内涵，感受导数在实际解决问题中的作用，了解微积分的文化价值。

导数的思想最初是由法国数学家费马（Fermat）为研究极值问题而引入的，但与导数概念直接相联系的是以下两个问题：已知运动规律求速度和已知曲线求它的切线。这是由英国数学家牛顿（Newton）和德国数学家莱布尼茨（Leibniz）分别在研究力学和几何学过程中建立起来的.因此，大学数学分析教材是这样定义导数的：

定义1　设函数y=f(x)在点x_0的某邻域内有定义，若极限

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

存在，则称函数f在点x_0处可导，并称该极限为函数f在点x_0处的导数，记作$f'(x_0)$（$x=x_0+\Delta x$）。所以导数是函数增量与自变量之比的极限，这个增量比称为函数关于自变量的平均变化率（又称差商），而导数$f'(x_0)$则为f在x_0处关于x的变化率。

定义2　设函数y=f(x)在点x_0的某邻域上[x_0，$x_0+\delta$）上有定义，若右极限

$$\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\quad（0<\Delta x<\delta）$$

存在，则称该极限值为f在点x_0的右导数，记作$f'+(x_0)$。

类似的，我们定义左导数

$$f'_-(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

右导数和左导数统称为单侧导数。如同左、右极限与极限的关系，我们有定理5.2　若函数y=f(x)在点x_0的某邻域内有定义，则$f'(x_0)$存在的充要条件是

$f'_+(x_0)$与$f'_-(x_0)$

都存在，且 $f'_+(x_0)=f'_-(x_0)$.

显然这个定义对高中学生是不好吃透的。

高中导数概念建立方式的说明:一般的导数概念学习的起点是极限，即从数列→数列的极限→函数的极限→导数。这种建立概念的方式具有严密的逻辑性和系统性，但是也产生了一些问题，就高中学生的认知水平而言，他们很难理解极限的形式化定义，由此产生的困难也影响了对导数本质的理解。因此，教科书没有介绍形式化的极限定义及相关知识，而是从变化率入手，用形象直观的“逼近”方法定义导数，这样一来，其一，避免学生认知水平和知识学习间的矛盾；其二，将更多精力用于对导数本质的理解上；其三，学生对逼近思想有了丰富的直观基础和一定的理解，有利于在大学的初级阶段学习严格的极限定义。

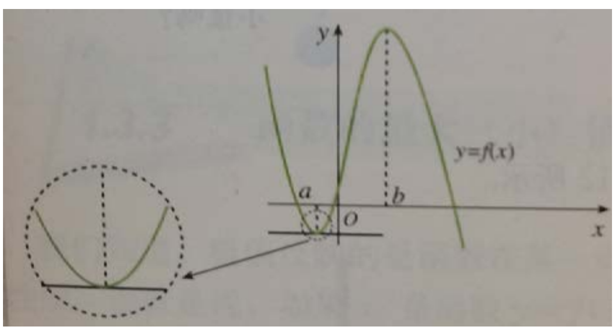
高中导数定义：一般地，函数f(x)在$x=x_0$处的瞬时变化率是

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

我们称它为函数y=f（x）在$x=x_0$处的导数，记作$f'(x_0)$或$y'|_{x=x_0}$，即

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

高中数学教材选修2-2中又是这样给出函数极值的定义的：如图2.1：以a、b两点为例，



我们可以发现，函数$y=f(x)$在点$x=a$的函数值$f(a)$比它在点$x=a$附近其它点的函数值都小，$f'(a)=0$；而且在点$x=a$附近的左侧$f'(x)<0$，右侧$f'(x)>0$。类似的，函数$y=f(x)$在点$x=b$的函数值$f(b)$比它在点$x=b$附近其它点的函数值都大，$f'(b)=0$；而且在点$x=b$附近的左侧$f'(x)>0$，右侧$f'(x)<0$。

我们把点a叫做函数$y=f(x)$的极小值点，$f(a)$叫做函数$y=f(x)$的极小值；点b叫做函数$y=f(x)$的极大值点，$f(b)$叫做函数$y=f(x)$的极大值。极小值点、极大值点统称为极值点，极大值和极小值统称为极值。

4、 知识获取与思考

显然这里的定义是争对可导函数而言的，而大学极值的定义是针对所有函数而言的（有的函数不可导也有极值），我不知道该怎么教学了，我想了许久，又想命题老师出这道题的意图在于考察学生的什么知识呢？

想了又想，我还是认为此题出在这是不合适的，为什么呢？因为教材是从导数的角度来理解的极值的定义，而不是像大学数学分析教材里这样给出的极值的严谨的定义：“若函数f在点x_0的某邻域$U(x_0)$内对一切$x\in U(x_0)$有$f(x_0)\geq f(x)(f(x_0)\leq f(x))$，则称函数f在点$x_0$取得极大（小）值，称点$x_0$为极大（小）值点，极大值、极小值统称为极值，极大值点、极小值点统称为极值点。”如果命题者的意图是考察学生对导数与函数极值的逻辑关系的考察，那么就应该加上函数$y=f(x)$在其定义域内可导；如果命题者的意图在考察学生是否注意到考题强调函数在定义域内的可导性，那这道题难度就非常大了，对于基础稍差点的学生，在极值教学中我们可以举反例强调不可导函数也有极值，让学生记住考虑函数极值存在的大前提，可是如果是基础比较好的学生，在函数极值定义与判断函数在某点导数为0与在某点有极值的逻辑关系时，自然会想什么函数是可导的，是不是在利用导数求极值时都要研究与考虑函数在它的定义域内是可导的，那么此时此刻我们真该想怎么教学了，这问题涉及的范围就大了，这个度就不好把握了（是不是建议争对这个导数与极值的教学我们有一个细密的教研活动，尤其是有经验的老师教会我们如何把控这个尺度大家统一教学）。

因为高中教材重点在于让学生会用导数求极值，主要在于解决实际生活中一些简单的优化问题，教材对导数概念的教学说明我刚才已经提到，也即我认为对高中学生来讲是不需要研究函数的可导性的，重点在于学生会用导函数求函数的极值，而学生在应用的过程中，往往先求导数，令导数为0，然后马上就会下结论说导数为0的点就是函数的极值点，马上把极值点带入函数解析式，就求函数的极值，这样做是错的，教材中就强调了函数在某点导数为0时，在这点不一定能取到极值，还举了反例：如：函数$y=x^3$在$x=0$时的导数为0，但是函数$y=x^3$在R上是单调递增的，所以在$x=0$处没有极值，所以强调了函数在某点导数为0是函数在此点取极值的必要不充分条件。学生在应用的过程中直接求导数，在根据有关知识求极值，从而求解实际生活的优化问题。所以我认为如果命题意图在于考察学生是否注意到函数的可导性在这里就不严谨了，这就是我对该月考题的解读，也是我在教学中应该注意的问题。

参考文献：

[1]人民教育出版社，课程教材研究所，中学数学课程教材研究开发中心编著，A版普通高中课程标准实验教科书《数学选修2—2》，人民教育出版社，2007年1月第2版，27页，29页.

[2]华东师范大学数学系编著，向21世纪课程教材《数学分析》上册第三版，高等教育出版社，2001年6月，88页至89页，92至93页.