归纳推理在初中数学中的应用

詹莹

宁波市第十九中学（宁波艺术实验学校）

[摘　要]注重学生归纳推理能力的培养是数学教育的应然追求。归纳推理在初中阶段的应用主要体现在通过归纳推理得到新概念、新命题、统计结果。教师应当关注到归纳推理在初中数学教学中的普遍性和重要性，帮助学生积累归纳推理的经验，逐步提升推理能力。

[关键词]归纳推理；概念；命题

【DOI】10.12252/j.issn.2096-6288.2020.02.1126

波利亚曾指出“数学有两个侧面，它是欧几里得式的严谨科学，但它也是别的什么东西。用欧几里得方法提出来的数学看来是一门系统的演绎科学；但在创造过程中的数学看来却像是一门实验性的归纳科学。”[1]但是波利亚提出的归纳推理模式缺乏客观性。现在我们通常认为归纳推理在形式上是由特殊到一般的推理。史宁中先生认为归纳推理是从经验和概念出发,按照某些法则所进行的、前提与结论之间有或然联系的推理。本质是,从经验过的东西推断未曾经验过的东西,从事物的过去和现在推断事物的未来,或者从事物的现在推断事物的过去。因此类比、统计推断都是归纳推理。

在数学问题的解决过程中，归纳推理更多地扮演着探究发现的角色，而演绎推理更多地起到证明的作用，用以确认结论的正确性。在初中数学教学中，归纳推理与演绎推理两者往往相辅相成，教师通过问题情境的创设来引导学生体会归纳推理的过程，发现新知，辅之以演绎推理确认新知的正确性。帮助学生认识到，数学既是需要论证，更是需要发现的学科。在初中数学教学中，归纳推理主要有三大方面的体现：

一、通过归纳推理得到新概念

有些数学概念是现实模型的直接反映，在数学教学中，我们可以通过呈现一定数量的实例或蕴含具体实例的问题，让学生通过观察其存在的共同点和不同点，从而归纳出抽象概念。例如：一元一次方程的概念

（1）一件衣服按8折销售的售价为72元，这件衣服的原价是多少元？设这件衣服的原价为 x 元，可列出方程：___________.

（2）有一棵树，刚移栽时，树高为2米。假设以后平均每年长0.3米，几年后树高为5米？设 x 年后树高为5米，可列方程___________ ；

（3）小强、小杰、张明参加投篮比赛，按规定每人投20次．小强投进10个球，小杰比张明多投进2个，三人平均每人投进14个球．问小杰和张明各投进多少个？设张明投进 x 个，可列出方程：____________.

思考：由以上的问题，你得到了哪些方程？$80\%x=72$，$2+0.3x=5$，$\frac{2x+12}{3}=14$有什么共同特点？

从实际问题出发，得到具有共性的方程，归纳本质特征从而得到新的概念是初中数学阶段得到新概念的常用模式，这属于归纳推理中的不完全归纳推理，数与代数部分的方程、函数、不等式都离不开这一归纳模式。因此在数学概念的教学中教师应当有意识地引导学生去发现不同例子间的共同点，提炼出相同的属性特征，最后学会用数学的语言归纳表达，这一过程是循序渐进的，尤其在同类概念教学时，教师应当有意识地引导学生进行类比，渗透归纳推理的方法，提高学生的推理能力。

二、通过归纳推理得到新命题

数学命题包括公理、定理、公式、法则、数学对象的性质等。对于定理、公式、数学对象的性质等也常常是通过归纳推理得到的。

例如：多边形内角和的求和公式：

抛出问题给学生：图中广场中心的边缘是一个五边形，你能设法求出它的五个内角的和吗？

引导学生：我们学过什么图形的内角和？

再延伸到四边形的内角和如何得到？学生发现分割四边形，得到2个三角形再求解。

再继续推广到五边形的内角和？分割得到3个三角形再求解。

六边形的内角和？分割得到4个三角形再求解。

……

n 边形的内角和？于是归纳推理得到 n 边形的内角和是 $(n-2)$ 个三角形的内角和。

有学者指出数学归纳推理是通过观察和组合特殊事例的

量性特征来发现一类事物的量化模式的创造性思维活动过程．需经历5个基本的认知阶段——“归纳五看”：个别的看、重复的看、想象的看、抽象的看和一般的看。[2]在讲解这一课例时，可以依据“归纳五看”进行。个别的看：三角形内角和180°，四边形内角和$180^\circ\times2=360^\circ$，五边形内角和$180^\circ\times3=540^\circ$。重复的看：三角形内角和$180^\circ$，四边形内角和$180^\circ\times2=360^\circ$，五边形内角和$180^\circ\times3=540^\circ$。想象的看：六边形内角和$180^\circ\times4=720^\circ$，七边形内角和$180^\circ\times5=900^\circ$二十边形内角和$180^\circ\times18=3240^\circ$抽象的看：$n$边形的内角和$180^\circ\times(n-2)$。一般的看：确认$n$边形的内角和$180^\circ\times(n-2)$的正确性和适用范围。实质上三角形内角和$180^\circ$本身也是归纳推理得到的，在学习了平行线之后再加以演绎证明。在教学过程中，教师应当有意识地带领学生经历这一归纳抽象的过程，如何从个别的情况到特殊的情况，再从特殊的情况到一般的情况，任何一个环节都不能替代学生思考，要让学生充分感受到推理过程中的逻辑性。图形与几何中还有常见的归纳推理得到的命题，如我们熟知的勾股定理，是先发现了等腰直角三角形的两直角边的平方和等于斜边的平方。进一步研究一般的直角三角形，这一结论依然成立，从而发现了毕达哥拉斯定理，我国称之为勾股定理。在实际教学中，教师通常设计活动，让学生自己画出一些直角三角形，测量其边长，发现三边长的平方之间的关系。借助方格纸帮助学生归纳发现这一结论。

三、通过归纳推理得到统计结论

我们常见的由归纳推理得到概念、命题主要集中在数与代数、图形与几何领域，在“统计与概率”部分中涉及的是统计推断——通过样本推断总体。

例如：水库中有多少条鱼问题

引导学生：类似的问题在统计与概率领域我们是否遇见过？

引出摸球问题这一原型：一个口袋中20个球，装的是一定数量的红球和白球，我们可以通过摸出的红球、白球数量比来推断袋中红球和白球的总数。

回到水库的情境，水库就是袋子，白球和红球对应什么呢？

鱼只有一类时，没法做出估计，需要先按“红球”“白球”分为两类，由此红球、白球分别对应有标记的鱼和没标记的鱼。这两个问题中，袋子、水库、球、鱼都可以视作一类符号，可以替换为其他的事物，关键的本质属性在于样本和总体之间的关系，要使这一关系能够合理地推断，我们尤其要注意样本的数量和代表性，这两方面都有保证的情况下才能得到相对可靠的统计结果。像这样利用样本数据推断出总体的情况，也是从有经验的东西去推断没经验的东西，仍属于归纳推理的范畴。这样看来，简单随机抽样、分层抽样、用样本平均数与方差推断总体平均数与方差，用频率估计概率等也都属于归纳推理。

在数学概念的产生过程中，人们经常采用归纳的方式，对于这类概念，教师常采用正反例的辨析来给出概念；在命题的产生中，则常会用到枚举、类比的方法，在统计与概率领域，则是统计推断，从个别归纳出一般，从局部推断整体。在归纳推理的教学过程中，教师对于学生的引导起到关键作用，需要教师设计问题、活动来启发诱导学生，为学生创设积极的环境。

新课标强调过程性目标，对于学生的数学学习而言，经历新知的产生过程是十分有必要的。了解知识从何而来，为何产生，对于如何理解，如何应用起到了至关重要的作用。归纳推理在教材中的充分体现也说明了在实际教学中教师应给予归纳推理足够的重视。赋予学生充足的思考时间和空间去亲自尝试和体验归纳推理的过程，在不同的内容领域内，引领学生去发现结论，学习如何用数学语言归纳结论，积累丰富的数学活动经验。而不是一味地强调证明的严谨训练，使得学生对于知识理解停留在形式化的层面，生搬硬套定理、公式，成为一个机械的执行者，背离数学教育的初衷。在方法的教学中，教师需要的是为学生创设体验的过程，认识到数学教育最想要给予学生的不单是抽象的知识，更希望学生掌握获取知识的方法，这种方法甚至能被运用到社会生活中去。

数学的知识随着时代的进步会发现未必全然正确，但是数学知识的学习背后蕴藏的思想方法应当是数学教育赋予每一位学生最宝贵的财富。归纳推理为数学世界带来了很多美妙的知识，为人类文明的进步作出了重大贡献。在亟需创新型人才的21世纪，数学教育更应当重视学生的归纳推理能力的培养，在一定地坚持过往对于命题证明的必要性和严谨性以及格式的科学性的重视的基础上，更全面地关照到数学命题的发现过程。转变学生对于数学知识的被动接受和机械模仿状态，培养学生的创新意识，弥补我国学生在创造性思维活动上的短板。

参考文献：

[1]张英伯，曹一鸣．数学方法论选读[M]．北京：北京师范大学出版社，2010，08．

[2]李兴贵，王新民．数学归纳推理的基本内涵及认知过程分析[J]．数学教育学报，2016，25（01）：89-93．