核心素养视角下的数学高考导数压轴题教学设计
——以2020年高考全国I卷理科数学第21题为例

左巍波　薛　莉
（广东省广州市第四中学　广东　广州　510170）

[摘　要]如何在教学中提升学生的数学核心素养，如何让学生在高考中取得高分，是高中数学教师面临的重要课题．本文以2020年高考全国I卷理科数学第21题为例多元探究，旨在打牢学生的基础知识，培养学生发散思维，提高学生分析和解决问题的能力，并给出积极教学、提升学生数学学科核心素养的几点总结．

[关键词]核心素养；教学设计；导数；分类讨论；分离参数
【DOI】10.12252/j.issn.2096-6288.2020.06.1707

一、内容和内容解析

（一）内容

导数压轴题主要包括利用导数判断函数单调性的方法，导数公式和导数运算法则，导数在最值和极值中的应用，不等式恒成立问题，零点问题．

（二）内容解析

函数是高中数学的“基石”，导数问题是高考的重点和难点．函数和导数 知识是高中数学教学的核心内容，一方面是作为重要的基础知识，考查学生对函数基础知识的理解和函数数学方法的掌握，另一方面也是考查学生数学核心素养的发展水平．蕴含的思想方法：导数压轴题蕴含了函数与方程思想、分类与整合思想、数形结合思想、特殊与一般思想，考查推理论证能力、运算求解能力、抽象概括能力及创新意识．本节课的教学重点是打牢学生的基础知识，打通导数知识的通法，培养学生发散思维，提高学生分析和解决问题的能力．基于以上分析，我们确定以下教学目标．

二、教学目标与核心素养

教学目标：1．学会函数导数的基础知识、基本方法，通过基础训练，来落实基础知识、基本方法；2．学会通用方法，适当补充拓展，提升能力；3．不断积累处理参数的技巧，提高运用类比方法探究问题的迁移能力．

核心素养：导数压轴题主要考察学生的逻辑推理和数学运算核心素养．通过高中数学课程的学习，增强交流能力，激发学生自主探究的积极性，培养学生发散思维，提高学生分析和解决问题的能力，提升数学抽象、逻辑推理、数学运算等数学学科核心素养．

三、教学问题诊断分析

（一）问题诊断

求导出错，具体表现在导数公式记忆出错、求导运算法则出错、代数式出错；不能利用函数与方程思想有效实现零点、根与交点的识别与转化，不能利用数形结合思想解决方程、函数、不等式的综合问题；分类与整合思想掌握不到位，在分类讨论过程中，不能做到不重不漏，标准一致．

（二）教学难点

解决不等式恒成立求参数范围这类问题时，往往需要对原不等式进行等价变形，如何进行有效变形是解决问题的关键．

四、教学过程

引例（2018年全国II卷理科数学第21题节选）已知函数 $f(x)=e^x-ax^2$，若 $a=1$，证明：当 $x\ge 0$ 时，$f(x)\ge 1$．

设计意图：本题给出了指数函数、幂函数混合时，要适当变形构造，指数型函数乘以或除以一个多项式函数，这样就很容易求出新函数的极值点，避免多次求导．为下面的解题做好准备．

例1（2020年高考全国I卷理科数学第21题节选）已知函数 $f(x)=e^x+ax^2-x$，当 $x\ge 0$ 时，$f(x)\ge \frac{1}{2}x^3+1$，求 a 的取值范围．

问题1：由 $f(x)\ge \frac{1}{2}x^3+1$，可直接转化为求 $f(x)-\frac{1}{2}x^3-1$ 的最小值吗？

学生1：不能，应注意到 $f(x)-\frac{1}{2}x^3-1$ 是指数函数 e^x、幂函数混合，直接求导很难求出极值点，需要适当的变形构造新函数 $g(x)=(\frac{1}{2}x^3-ax^2+x+1)e^{-x}\le 1$，等价于求 $g(x)_{max}\le 1$．$g'(x)=-\frac{1}{2}x(x-2a-1)(x-2)e^{-x}$，比较极值点 $2a+1$ 和 2 的大小关系进行分类讨论．① 当 $a\le -\frac{1}{2}$ 时，当 $x\in(0,2)$ 时，$g'(x)>0$，所以 $g(x)$ 在 $(0,2)$ 上单调递增，而 $g(0)=1$，故当 $x\in(0,2)$ 时，$g(x)>1$，不合题意；② 当 $-\frac{1}{2}<a<\frac{1}{2}$ 时，当 $x\in(0,2a+1)\cup(2,+\infty)$ 时，$g'(x)<0$，当 $x\in(2a+1,2)$ 时，$g'(x)>0$．所以 $g(x)_{max}=max\{g(0),g(2)\}\le 1$，即 $g(2)=\frac{7-4a}{e^2}\le 1$，则 $a\ge\frac{7-e^2}{4}$．所以当 $\frac{7-e^2}{4}\le a<\frac{1}{2}$ 时，$g(x)\le 1$．③ 当 $a\ge\frac{1}{2}$，则 $g(x)\le(\frac{1}{2}x^3+x+1)e^{-x}$，由于 $0\in\left[\frac{7-e^2}{4},\frac{1}{2}\right)$，故由②可得 $(\frac{1}{2}x^3+x+1)e^{-x}\le 1$．故当 $a\ge\frac{1}{2}$，$g(x)\le 1$．综上所述，a 的取值范围为 $a\ge\frac{7-e^2}{4}$．

问题2：先对原不等式进行变形，然后再构造．那么能不能想办法减少讨论的分支呢？

学生2：可以，利用特殊点的函数值（极值点）满足不等式，缩小参数可能的取值范围，以减少讨论的分支．因为 $g(2)=(7-4a)e^{-2}\le 1$，故 $a\ge\frac{7-e^2}{4}$，所以 $2a+1\ge\frac{9-e^2}{2}>0$．

学生3：还可以分离参数 a，$a\ge\left(\frac{1}{2}x^3+x+1-e^x\right)x^{-2}$，构造新函数 $h(x)=\left(\frac{1}{2}x^3+x+1-e^x\right)x^{-2}$，转化为求函数 $h(x)$ 的最值问题．$h'(x)=(2-x)(e^x-\frac{1}{2}x^2-x-1)x^{-3}$，记 $g(x)=e^x-\frac{1}{2}x^2-x-1$，$g'(x)=e^x-x-1$，$\because x\ge 0$ 时，$g''(x)=e^x-1\ge 0$ 恒成立，所以 $g'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，$\therefore g'(x)_{min}=g'(0)=0$，即 $g'(x)\ge 0$ 恒成立，$\therefore g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，$g(x)_{min}=g(0)=0$．

令 $h'(x)=0$ 可得 $x=2$，当 $x\in(0,2)$ 时，$h'(x)>0$，$\therefore h(x)$ 在 $(0,2)$ 上单调递增；当 $x\in(2,+\infty)$ 时，$h'(x)<0$，$\therefore h(x)$ 在 $(2,+\infty)$ 上单调递减．$\therefore h(x)_{max}=h(2)=\frac{7-e^2}{4}$，即 $a\ge\frac{7-e^2}{4}$．

问题3：通过观察原函数，对原函数变形后构造函数，分参后构造函数是一种常用方法．那么对求完 $h'(x)$ 后判断其正负的，除了利用二阶求导，还有没有其他方法？

学生4：对 e^x 采用泰勒展开式进行适当的变形与放缩，得到 $e^x-1-x-\frac{x^2}{2}>0$，从而得到 $h(x)$ 的单调性．

学生5：对 e^x 采用泰勒展开式进行适当的变形与放缩，得到 $e^x>1+x$，并取定积分 $\int_0^x e^x dx>\int_0^x(1+x)dx$，从而得到 $e^x-1-x-\frac{x^2}{2}>0$．

通过一题多解，以学生为主体，让学生的思维在师生之间、生生之间的交互中得到碰撞、提升，学生们的“构造”能力越来越强，学科素养的提升显而易见．

变式1　已知函数 $f(x)=e^x+ax^3-\frac{1}{2}x^2-x$，当 $x\ge 0$ 时，$f(x)\ge\frac{1}{6}x^4+1$，求 a 的取值范围．

设计意图：当学生初步体验了构造思想是导数问题解题的关键以后，教师及时引导学生进行变式练习，一来巩固所学知识与技能，二来达到深化理解，将新的理解纳入原有认知结构的目的．

练习1（2011年全国I卷理科数学第21题）已知函数 $f(x)=\frac{a\ln x}{x+1}+\frac{b}{x}$，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $x+2y-3=0$．

求 a 、 b 的值；（2）如果当 $x>0$ ，且 $x\neq1$ 时， $f(x)=\frac{a\ln x}{x+1}+\frac{b}{x}$ ，求 k 的取值范围.

练习2（2014年全国Ⅰ卷理科数学第21题）函数 $f(x)=ae^{x}\ln x+\frac{be^{x-1}}{x}$ ，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线为 $y=e(x-1)+2$.

（1）求 a,b ；（2）证明： $f(x)>1$.

五、教学反思

（一）回归教材，注重基础

高考试题的来源往往是教材内容的再现，细心观察，多数高考题都能在教材中找到“原形”. 例如人教A版《数学》选修2-3教材第32页习题1.3B组第一题：根据函数单调性证明两个不等式 $e^{x}>1+x(x\neq0)$ 和 $\ln x<x<e^{x}(x>0)$ ，本文的高考题就有这道题的影子. 因此高三复习尤其是第一轮复习要打牢数学基础知识，回归教材才是正道[4]. 通过教材中习题的基础训练，来落实基础知识、基本方法，确保人人可以拿到基础分. 同时对教材进行深入挖掘，科学整合教材中的一些典型例题、习题、发挥教材的最大功能.

（二）回归通法，体现综合

数学的解题目的是什么？是求出问题的答案吗？显然是，但也不全是！解题的目的是巩固数学基础知识、落实数学基本技能、感悟数学思想方法，提升数学核心素养. 所以对一道典型问题的多元分析与解答是非常必要的，这是多元求解的主要原因，当然并非解法越多越好，我们要在多种解法中，寻找通性、通法，这样才有助于教师的教与学生的学.

同时函数与导数涉及的内容多，高考的试题容量是有限的，因此通常是通过综合设计试题，将各分支的内容交叉与渗透，要求考生能综合运用所学知识、原理、方法分析问题和解决问题.

（三）回顾总结，提升素养

杰出的数学家、数学教育家波利亚指出：“中学数学教学的首要任务就是加强解题的训练”而他的解题思想集中体现在“四步解题法”中，即：理解题目、拟订方案、执行方案、回顾[5]. 回顾即是反思、总结，回顾反思不仅是对解题过程的回顾，更是我们重新梳理思路的过程，总结经验教训，达到“做一题，会一类”的目的，渗透数学思想方法，培养学生的关键能力，提升学生的数学核心素养.

参考文献

[1]任子朝，赵轩. 突出基础性综合性 发挥区分选拔功能——2018年高考数学函数试题分析[J].中国考试，2018（11）.

[2]华东师范大学数学系. 数学分析[M].高等教育出版社，2010.

[3]张涛，吴跃. 2018年全国数学高考卷Ⅰ文科第21题探究[J]. 中学教研（数学），2018（8）.

[4]波利亚著，阎育苏译. 怎样解题[M].科学出版社，1982.

*本文是广州市荔湾区教育科学“十三五”规划2018年度立项课题《基于高中数学核心素养的教学设计研究》（课题编号：YB2018-2）的阶段性研究成果.

阶梯教学法在初中数学教学中的应用

陈纪为

（哈尔滨市优贝教育文化学校　黑龙江　哈尔滨　150000）

[摘　要]经过小学六年的基本数学学习，初中时期的学生在知识掌握方面明显有了一定的差距，他们的水平参差不齐。在此情况下，实施阶梯教学法是有效缩小同学间的差距的方法之一。本文就如何在初中数学教学中实施阶梯教学法展开讨论。

[关键词]初中数学；阶梯教学；激励教学

【DOI】10.12252/j.issn.2096-6288.2020.06.1708

如何既照顾到数学学习能力较低的同学，又让学有余力的同学的能力得到充分发展，这是目前想要提高学生成绩遇到的最大的问题。而阶梯教学法及时又准确地解决了这个问题，他针对所有的学生，主张“因材施教”，使所有的学生都得到了全面的发展。

一、阶梯教学法的目的

现代教育致力于把学生培养成德、智、体、美、劳全面发展的人，阶梯教学法的出现顺应了教育改革的要求。它的目的旨在减轻学生们的负担，让每一个学生都能适应学习，从而提高学生的学习兴趣以达到教学目标。其次阶梯教学法的优势在于它的思路清晰，逻辑合理，有利于发展学生们的逻辑思维能力，这种能力在数学学习中是一种不可或缺的能力。另外在划分阶梯时要关注学生的心理健康，教师要引导学生客观看待划分阶梯事情，要让学生们意识到这不是一种歧视而是为了班级整体的优化。

二、阶梯教学法实施方案

（一）学生分阶梯

学生们的知识水平参差不齐，如果把他们放在一个班级中进行教学对于不同水平的同学来说是不利的，就像木桶原理这样不仅会耽误教学进度，教学效率也会大幅下降。所以在阶梯教学法实施的第一步就是要把学生们进行阶梯分类，根据学生的学习能力强弱把学生分为三个阶梯：学习能力强的、学习能力中等以及学习能力弱的学生。然后再把这三个阶梯的学生集中到各自的班级中进行教学，比如学习能力比较强的学生除了书本的知识外还可以在拓展延伸一些课外与之相关的知识或习题，学习能力中等的学生就把课本的内容吃透就可以了，而学习能力比较弱的同学能把课本中的基础知识全部掌握就好。这在一定程度上减轻了教师的负担，故教师在讲课的时候的氛围自然而然就会比较轻松愉快，同学们学习起来也会更加简单有效。

（二）备课阶梯化

学生在上课前需要预习，教师在上课前则需要备课。备课是为讲课做准备的，备课的好坏会直接影响到讲课的质量。教师要想清楚明了地将知识交给学生，首先需要自己对知识理解掌握通透，逻辑思维清晰，分阶梯式备课是帮助老师理清思路的好方法，同时老师还可以利用思维导图辅助理解知识、理清思路。数学一直以来给人的印象都是枯燥，死板，抽象的，所以老师在教学的时候，只有先把自己的思路阶梯式理清楚才能更好地指导学生的思维。

例如，在备课八年级上册第十二章《全等三角形》时，教师要认真研究教材，这一章节大致可以分为三个阶梯。第一个阶梯是比较容易的知识点，是认识全等三角形。第二个阶梯是中等的知识点，了解全等三角形的性质。第三个阶梯是重点，也是难点，是全等三角形的判定。阶梯大纲分好之后，教师就可以对每个阶梯填上具体的内容，比如教学目标、教学内容、教学总结等。其实，思维导图是体现人们思维的一种图像形式，教师在备课的时候也可以自己先把全等三角形的知识点框架做成思维导图，将它作为一个理清思路的辅助工具。在讲课的时候老师就可以把思维导图通过多媒体放映展示给学生们看。或者教师可以先让学生根据自己的理解绘制思维导图，然后再与老师的进行对比，优缺互补，这样教师和学生也会共同进步。

（三）讲课阶梯式

备课是前期的准备工作，讲课则是学生与教师面对面的交流。教室在讲课的时候也要注重阶梯式，就是知识点要由易到难地进行教授，先让学生们从最基础的开始学习，然后再慢慢地深入了解重难知识点。有了基础知识的铺垫，重难知识点学习起来会更易于理解。讲课阶梯化能更有效率地利用课堂时间，在相同的时间内可以把更多的知识传授给学生。而且现在越来越强调学生的主体地位，阶梯式讲课不仅能提高学生的主体意识，还可以多加一些学生与教师之间的互动。课堂上学生对教师的反馈是十分重要的，它会影响老师的心情、讲课热情和课堂质量。

比如在教学九年级上册第二十二章《二次函数》时，这一章节也可以分为三个阶梯。第一个阶梯是二次函数的图像与性质。第二个阶梯是重点，主要探讨二次函数与一元二次方程的关系。第三个阶梯是难点，是二次函数与实际问题的联系，并用二次函数来解决实际问题。第一个阶段讲十分钟左右，第二个阶段需要十五分钟左右，第三个阶段则需要二十分钟。由易到难，层层深入，全面地将知识点教授给学生，这样阶梯式的课堂会让学生感觉到课堂是很充实的。充实的课堂会给学生一种满足感、成就感，这些感觉会让学生喜欢学习数学，他们不会再认为数学是枯燥无味的，所以教师在讲课的时候要有阶梯型。

结束语

总之，阶梯教学法对初中数学教学有很大帮助。教师要充分利用阶梯教学法，先对学生进行分阶，然后在备课和讲课的时候也要分阶教学，整理逻辑理清思路，给学生提供一个更好的课堂。另外老师再讲课过程中也要勇于探索，积极创新，因材施教，为培养学生各方面能力和提高课堂质量不断努力！

参考文献

[1]马志奇.数形结合思想在初中数学教学中的应用[J].学周刊，2020（29）：51-52.

[2]唐晓红.浅谈初中数学教学中创造性思维能力的培养[J].学周刊，2020（29）：85-86.