

# 基于“雨课堂”的极限概念的教学设计

刘 杨 杨 卓

(天津商业大学 理学院 天津 300134)

**[摘要]** 极限理论贯穿于微积分的始终,是微积分理论的根本。极限概念的教学及其重要。本文借助“雨课堂”平台,对极限概念进行了教学设计。

**[关键词]** 极限;雨课堂;教学设计

**[DOI]** 10.12252/j.issn.2096-6288.2020.06.369

高等数学是大学生必修的一门公共基础课。其内容涵盖了微积分、常微分方程、解析几何、级数的内容。微积分是高等数学的重要组成部分。牛顿和莱布尼茨创立了微积分,但微积分创立以来的一个世纪,它的基础并没有弄清楚。他们的方法支配了一百多年的数学发展,直到极限理论和实数理论的建立,使微积分体系变得更加可靠。可以这样认为,极限是整个微积分的根本。极限思想抽象难懂,对于刚入大学校门的学生而言,更是思维上从有限转向无限的挑战。因此极限的教学极其重要。

## 一、传统教学方式

### 1、借助引例,给学生直观印象

首先借助我国古代数学家刘徽的“割圆术”引入极限思想。首先请学生思考圆的面积公式是如何得到的。利用圆内接正多边形的面积来计算圆的面积,从三角形、正方形的面积开始,再计算正六边形、正十二边形的面积,不难发现,随着正多边形的边数的不断增加,正多边形的面积越来越接近圆的面积。从几何上看,正多边形的边数越多,正多边形越接近圆形。接着请学生思考,正多边形的边数要大到什么程度,才能使得其面积是圆的面积。这时教师引入 $n \rightarrow \infty$ ,引导学生的思维方式从有限转向无限。在此过程中,正多边形的面积刚好构成了数列,也就是随着边数的无限增大,正多边形的面积越来越接近一个确定的数也就是圆的面积。

### 2、“粗糙的”数列极限定义

通过上面的例子,学生对极限有了初步的理解,也就是“粗糙的”数列极限定义:若当 $n$ 无限增大时,数列 $x_n$ 越来越接近一个确定的数值 $a$ ,就称 $a$ 是当 $n \rightarrow \infty$ 时数列 $x_n$ 的极限。

### 3、提问式教学法,引导学生得到严密的极限定义

教师:(1)“ $x_n$ 越来越接近一个确定的数值 $a$ ”如何用数学语言描述?

(2)“ $n$ 无限增大”到哪个时刻,才能保证“ $x_n$ 越来越接近一个确定的数值 $a$ ”?

以 $\{1+(-1)^n \frac{1}{n}\}$ 这个数列举例说明。学生很容易得到此数列无限接近于1。从几何的角度去看,数轴上1的附近“聚集”了无穷多个点,这些点与1的距离很近。数学上可以表示距离的式子是:

$$|1+(-1)^n \frac{1}{n}-1|=\frac{1}{n}.$$

因此第一个问题“ $x_n$ 越来越接近一个确定的数值 $a$ ”就是 $|x_n-a|$ 这个值

要多小有多小,接下来可以任意找出一个任意小的数,不妨设为 $\varepsilon$ 。如果让 $|x_n-a|$ 这个值小于 $\varepsilon$ ,即 $|x_n-a|<\varepsilon$ ,就可以精确的描述“ $x_n$ 越来越接近一个确定的数值 $a$ ”。

接下来,让 $|1+(-1)^n \frac{1}{n}-1|=\frac{1}{n}<\varepsilon$ , $\varepsilon$ 是给定的任意小的数。例如,可以取 $\varepsilon=\frac{1}{1000}$ ,则有 $n>1000$ ,也就是当 $n$ 取大于1000的数时, $|x_n-1|=\frac{1}{n}<\varepsilon=\frac{1}{1000}$ ;若取 $\varepsilon=\frac{1}{10^4}$ 时,则有 $n>10^4$ ,也就是当 $n$ 取大于 $10^4$ 的数时, $|x_n-1|=\frac{1}{n}<\varepsilon=\frac{1}{10^4}$ 。若取 $\varepsilon=\frac{1}{N}$ 时,其中 $N$ 为一个足够大的数,则 $n>N$ 时, $|x_n-1|=\frac{1}{n}<\varepsilon=\frac{1}{N}$ 。

因此,得到精确的极限定义:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, \text{使得 } |x_n - a| < \varepsilon.$$

在这个过程中,虽然教师注意了对学生思维方式的引导,递进式地给出了极限的精确定义,但是对于学生来说,参与度不高,不能充分的调动学生的学习热情以及积极性。借助雨课堂进行教学,不仅提高学生兴趣,更能使整堂课程变得活泼生动。

## 二、基于“雨课堂”的极限概念的教学

手机目前成为炙手可热的电子产品,机身小巧,功能强大,给人们的生活带来了极大的便利。但是事物是矛盾的,有好的一面就有不好的一面。学生将手机带入课堂,极易分散学生的注意力,甚至学生上课打游戏拒绝听课学习。“雨课堂”可以充分利用手机的优势,吸引学生的注意力,让学生参与到课程中来。“雨课

堂”平台不仅方便教师统计出勤率,还可以建设课件库存、试题库,方便学生学习练习。教师授课时,利用“雨课堂”平台,可以设置小问卷,发放问卷,让学生答题,可以开启弹幕,及时了解学生学习信息,还可以给学生发红包,提高学生学习动力。借助“雨课堂”进行阶段测验后,教师可以快速便捷地获得各项成绩数据,提高了教师的工作效率,学生也可以快速地清晰地了解自己学习程度。

在教授极限概念时,教师可利用“雨课堂”进行选择题设置,让学生自己答题。进行问题设置时,实际上是教师将传统教学过程的引导学生得到精确地极限定义的思想,以选择题的形式向学生发出,按照学生答题结果进行红包分发。例如,可以设置如下问题:

问题一:我国古代数学家刘徽的数学成就有哪些?( )

A 九章算术 B 周髀算经 C 割圆术 D 杨辉三角形

问题二:割圆术描述的是( )

A 利用多边形的面积无限逼近圆的面积从而得到圆周率

B 利用正多边形的面积无限逼近圆的面积从而得到圆周率

C 利用圆内多边形的面积无限逼近圆的面积从而得到圆周率

D 利用圆内正多边形的面积无限逼近圆的面积从而得到圆周率

问题三:割圆术中,正多边形的边数越( ),正多边形的面积越( )圆的面积。

A 多 不接近 B 多 接近 C 少 不接近 D 少 接近

问题四:如何让问题三种的“接近”变为“就是”?

A 边数特别多 B 边数足够多 C 边数无限增大 D 边数差不多

问题五:边数无限增大“翻译”成数学语言是( )

A  $n \rightarrow \infty$  B  $n = \infty$  C  $n > \infty$  D  $n < \infty$

问题六:正多边形的面积越来越接近圆的面积,正多边形的面积可以构成数列,也就是数列越来越接近一个确定的数,可以这样理解吗?

A 可以 B 不可以

问题七:“ $x_n$ 越来越接近一个确定的数值 $a$ ”如何用数学语言描述?

A  $x_n = a$  B  $x_n < a$  C  $x_n > a$  D  $|x_n - a| < \varepsilon$  ( $\varepsilon$ 为任意给定的特别小的数)

问题八:对于 $\{1+(-1)^n \frac{1}{n}\}$ ,此数列的极限是( )

A 1 B 0 C 2 D -1

问题九:取 $\varepsilon = \frac{1}{1000}$ ,当 $n$ 取大于( )的数时,有

$$|x_n - 1| = \frac{1}{n} < \varepsilon = \frac{1}{1000} \text{ 成立?}$$

A  $\varepsilon = \frac{1}{1000}$  B  $\frac{1}{\varepsilon} = 1000$  C 任意整数 D 0

问题十:取 $\varepsilon = \frac{1}{10^4}$ 时,当 $n$ 取大于( )的数时,有

$$|x_n - 1| = \frac{1}{n} < \varepsilon = \frac{1}{10^4} \text{ 成立?}$$

A  $\varepsilon = \frac{1}{10^4}$  B  $\frac{1}{\varepsilon} = 10^4$  C 任意整数 D 0

问题十一:取 $\varepsilon = \frac{1}{N}$ 时,其中 $N$ 为一个足够大的数,当 $n$ 取大于( )的数时,有 $|x_n - 1| = \frac{1}{n} < \varepsilon = \frac{1}{N}$ 成立?

A  $\varepsilon = \frac{1}{N}$  B  $\frac{1}{\varepsilon} = N$  C 任意整数 D 0

这些问题可以穿插于教师的讲授过程中,不仅体现了教师的教学思路,更让学生积极参与到课堂教学中,使得原本枯燥的知识变得有趣,从而提高学生的学习效果。

## 参考文献

- [1] 同济大学数学教研室. 高等数学:下册[M]. 第七版 北京: 高等教育出版社, 2014, 218-222.
- [2] 孙波. 从极限简易定义谈高等数学通俗化教学[J]. 教育教学论坛, 2020(39): 238-239.
- [3] 罗婷婷, 彭建奎. 线上线下混合式教学视角下“高等数学”课堂翻转的设计与研究——以“数列极限的概念”为例[J]. 教育现代化, 2020(48): 76-80.