基于圆内两条动弦，探究三角形相似模型

韩月红

金陵汇淳学校

[摘　要]党的十八大提出“教育的根本任务是立德树人”。章建跃专家在一次“数学核心素养的变革”报道采访中提道：数学学科是以立德树人作为学科核心素养的统领，教师要具备课程意识，培养和发展学生核心素养，也就是要在学生的数学学习上产生最大的最长期的利益。落实数学的核心素养就是数学抽象、数学建模等六个方面。教师需认真备课、理解教材、了解学生、掌握数学，做一个思考者、探究者。下面，笔者结合自己在一次市级公开课中的收获和感想，从教学育人，生长数学的视角，谈谈自己的收获、感想，与大家交流，以提升自我。笔者执教的课题是“中考专题复习圆与相似”，圆与相似是初中几何的重点，笔者通过九年级第二章圆和第六章图形的相似之探究，将圆内两条弦动起来有机地将圆与相似结合在一起，用一条线将知识串起来，形成一系列完整的体系，培养学生综合解决问题的能力，提高创新意识，熟练掌握几何模型的能力。

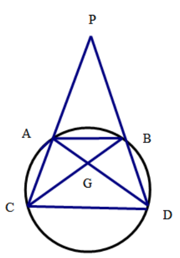
[关键词]圆；相似；几何模型；核心素养

【DOI】10.12252/j.issn.2096-6288.2021.10.408

一、从动弦入手，探究相似

圆内两条弦AB、CD，CD固定，通过旋转AB得到与CD的位置关系得出三角形相似的基本模型，从而得出线段之间的关系。

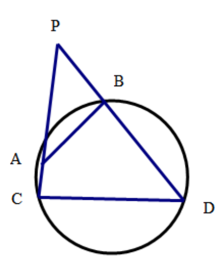
1.从特殊的平行入手：如图一AB∥CD，有△PAB∽△PCD（A型）则 $\frac{PA}{PC}=\frac{PB}{PD}$，有△GAB∽△GCD（X型）则 $\frac{GA}{GD}=\frac{GB}{GC}$



图一

由圆内两条特殊的平行弦，得到两种特殊的相似模型，从而有四条线段之间的关系。体现初中数学从特殊到一般，从易到难的思路。

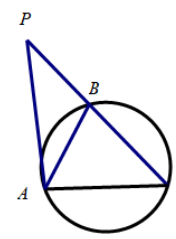
2.将AB旋转到（图二）有△PAB∽△PDC（反A型）则 $\frac{PA}{PD}=\frac{PB}{PC}$ 即PA•PC=PB•PD



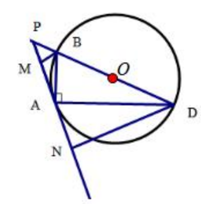
图二

弦CD固定，把弦AB逆时针旋转，由圆内接四边形对角互补得∠PAB=∠D，∠P=∠P（公共角）△PAB∽△PDC，再由成比例 $\frac{PA}{PD}=\frac{PB}{PC}$ 到PA•PC=PB•PD

3.将AB旋转到（图三）PA为切线，有△PAB∽△PDA（反A型）则 $\frac{PA}{PD}=\frac{PB}{PA}$ 即 PA^2=PB•PD；将BD特殊成直径，过点B、D构造直角三角形（图4）则有△MAB∽△NDA



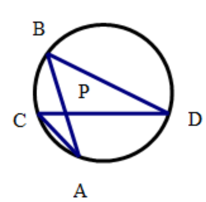
（图三）



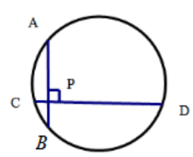
（图四）

在图二基础上继续将弦AB逆时针旋转，至与圆产生一个交点A，此时PA与圆相切，由弦切角定理易得∠PAB=∠D，∠P=∠P　则△PAB∽△PDA，得四条线段成比例，所以 PA^2=PB•PD，即PA是PB、PD的比例中项。在图三基础上特殊化，把弦BD特殊成直径，就会出现特殊的圆周角∠BAD=90°过点B、D分别作BM⊥PA，DN⊥PA，与三角形△PAO构成图一所示的A型相似，从而图四中就出现了新的相似模型△MAB∽△NDA（一线三等角）。

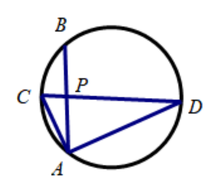
4.将AB旋转到（图五）AB、CD相交于点P，有△PAC∽△PDB，则有PA•PB=PC•PD，再旋转AB到（图六）AB与CD垂直，上述结论仍然成立。继续特殊CD成直径（图七）有垂径定理，△PAC∽△PDA∽ADC　PA2=PC•PD　AC2=PC•CD　DA2=DC•PD



（图五）



（图六）



（图七）

图五中的相似模型为反x型，图六为图五的特殊情况，所以PA•PB=PC•PD是成立的，继续特殊CD为直径，则有母子型，从而得到三条比例中项。

二、立足模型，加强推理

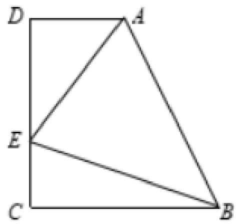
初中数学重视从难到易，从特殊到一般的过程，圆内两条弦的位置关系无非就是平行与相交，先从特殊的平行着手，很容易得出最简单的相似模型——（A型）和（x型）；再把其中一条线段动起来（旋转）至相交（线段无交点）——（反A型）；继续动就出现交点，分两种情况，一种特殊的交点在圆上、此时为相切——（半母子型），此时继续特殊把弦BD变成直径，再次构造相似模型——（一线三等角），一种一般情况交点在圆内——（反x型）；最后旋转成两条弦相交垂直——（母子型）。

圆中的定理结论很多，对学生的逻辑推理要求很高。“授人以鱼，不如授人以渔”，通过两条弦的运动，引导学生通过基本图形的归纳与总结，理解圆作为问题背景的作用，抓住问题的本质，将圆的知识与三角形相似进行有机的结合，归纳出几种常见的相似几何模型，让学生经历几何模型的形成过程，重视培养学生思考和分析问题的能力，注重培养学生的模型意识，使学生能利用几何模型把复杂的问题简单化，发展学生的数学核心素养。数学教学应该以数学知识结构、数学思想方法、几何模型为载体，以找模建模为核心，以提高学生的数学能力和素养为目的，着眼于学生核心素养的养成。要培养学生的逻辑推理能力绝不能急于求成，可通过几何模型的教学，让学生在脑海中形成各种基础的直观图形，再在复杂的图像中找出这些基本图形，加强分析训练，逐步实现推理能力的提高。

三、模型应用

图形运动问题是中考之热点、重点、难点.它是考查考生数学能力及拉分的重要部分，笔者发现学生在分析此类问题时并不“轻松”，因为他们往往对图形运动中“目标图形”及运动后产生的特殊性不能很好地挖掘，那么“动”就失去了意义。如：下题为2019年南京一模卷中第16题，此题必须补成正方形后将三角形旋转，学生很难想到，旋转后也发现不了特殊的三角形全等。

16.如图，四边形ABCD中，AD∥BC（BC＞AD），∠ADC＝90°，∠ABE＝45°，BC＝CD，若AE＝5，CE=2，求BC的长度.

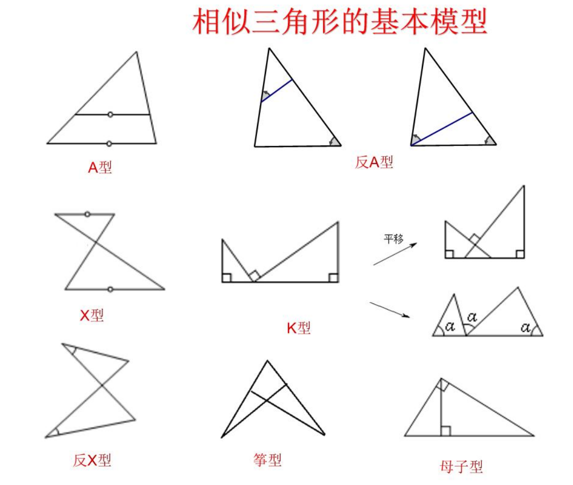


知识技能转化成解题技能。目标图形运动变化后蕴含的核心是特殊性，其抽象性表现在学生往往不能明确地确定图形运动到新的位置所形成的新的特性，有动与静的辩证思考，严谨而逻辑地数学推理，综合性较强，思维跨度比较大。根据化抽象为具体、化繁难为容易的教学原则，教学中可以让通过想、动、说、画、算等环节的具体操作来突出重点、突破难点。

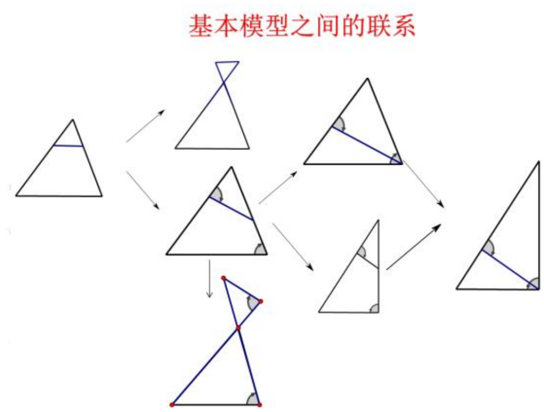
在圆与相似的相关知识的结合中，将基本图形加以演变，基础知识就会得到升华，就能得到更深层次的结论，而在变化的过程中思维就得到逐渐的扩展，思维的灵活度就得到提高，就能够很好地综合分析和解决问题。所以在平时的复习中利用这样的特殊图形进行习题的变式训练将是一种有效提高课堂效率的教学方法，值得老师们认真研究、探讨，把变式训练变为常规教学，激发学生的学习兴趣和自信，以不变应万变，培养他们创新思维能力。

四、归纳总结，相似模型再优化

学生之前分别学习过相似三角形相似和圆，但学生对它们的认知基本上停留在“零碎化”的“就题论题”的浅表层次，缺乏把两者之间联系起来深入研究。由圆中常见的两条弦的问题引人，在问题不断演变（线段旋转）的过程中，帮助学生建立相似三角形知识与圆中知识的联系，理解圆作为题目的载体仅提供了“相等的角”这一条件，抓住问题的本质，利用圆的只是寻找另一角相等，将圆中的问题转化为相似三角形问题，从而得出线段之间的关系。体现“曲”（圆）化“直”（三角形）思想。从两者联系中将相似模型分离出来再次认识与优化，形成一个有机的体系。



图片一是三角形相似的几种基本模型，图片二是模型之间的联系，通过将图形动起来（旋转、翻折）将各个模型串联起来，形成有机的一个体系。



五、总结

数学的逻辑推理能力是新课程标准提出的十大核心素养之一。发展学生的推理能力历来是数学教学的一个重要目标，几何教学对学生逻辑推理能力的发展作用是不言而喻的。数学问题的奇妙在于这些看似简单的数字和图形，蕴藏着无穷的奥妙。既来源于生活又应用于生活。它的思考过程很多时候需要一个“双向”的思维过程，即从“已知”和“未知”两个方向去思考去探究问题。已知出发时可以推导出很多结论，而从“未知”出发，要得到这个结论，又需要各式各样的“条件”，需要我们灵活的去发现模型和建立模型。数学模型意识的建构是数学核心素养提升的一大特征。

宇宙之强大，粒子之细微，火箭之神速，化工之林巧，地球之变化，日用之繁琐，处处都有数学.数学之独特在于与生活紧密联系具有育人功能，主要是培养学生思维能力，尤其是学生的逻辑思维，要使得学生从简单思考，到逻辑思考、再到创造性地思考。使学生具备发现问题，提出问题，从而解决问题的能力。总之在数学育人理念下的初中数学课堂，要无限提高学生的核心素养。

参考文献

[1]杨裕前，董林伟.数学教参九年级下册[M]. 江苏凤凰科学技术出版社，2019.12

[2]张跃.来自分类讨论思想的温馨提示——两种方法助你找到相似三角形的对应关系[J].中学数学.2020，第020期

[3]中华人民共和国教育部.义务教育数学课程标准（2011版）[S]北京.北京师范学出版社，2012