复变函数多值性的教学案例与思考

朱熙湖

广州番禺职业技术学院公共课教学部

[摘　要]复变函数的知识结构，总体和高等数学相似，但存在一些本质的差别，例如复变函数的多值性，本文通过对对数函数多值性的一个结论的验证，在教学活动中实现师生的互动，不仅让师生对复对数函数的多值性进行深入思考和再认识，同时也提供了通过提出小问题，调动学生积极性的几点思考.

[关键词]复变函数；对数函数；多值性

【DOI】10.12252/j.issn.2096-6288.2021.10.2054

一、引言

笔者多次担任《复变函数》的教学工作，选用的教材是西安交通大学高等数学教研室编写的《复变函数》（第四版）[1]。复变函数课程，它的知识体系几乎是高等数学的翻版。在高等数学中，知识结构是函数、极限、连续、导数、积分的编排顺序，循序渐进，层层推进。到复变函数中，也是这样的结构层次。然而，在一些地方，二者之间的差别还是很大的。比如在初等函数部分，高等数学是按照幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数的顺序逐一介绍的，给人一种由简到繁的层次感。而复变函数中，因为讨论范围从实数到了复数，数域变了，函数就不一定能够遵循实数范围的约定，所以要重新定义。复变函数里面的初等函数，是先从指数函数入手，做好约定，验证这样的约定合理后，再由它出发，来定义三角函数、对数函数、幂函数。复数的表示中，因为有了明显的几何意义，辐角出现了多值性，这给学生的学习带来了不少困扰。

二、一个关于复变函数多值性的讨论

本学期在讲授复变函数中初等函数部分，有关对数函数$\mathrm{Ln}z$的性质，教材里有这样的结论：等式 $\mathrm{Ln}(z_1z_2)=\mathrm{Ln}z_1+\mathrm{Ln}z_2$，$\mathrm{Ln}(\frac{z_1}{z_2})=\mathrm{Ln}z_1-\mathrm{Ln}z_2$ 成立，而当 $n>1$ 时，等式 $\mathrm{Ln}z^n=n\mathrm{Ln}z$ 和 $\mathrm{Ln}\sqrt[n]{z}=\frac{1}{n}\mathrm{Ln}z$ 不再成立. 四个式子教材都没有给出证明，前面两式，利用对数函数的定义，容易验证其成立. 第三个式子 $\mathrm{Ln}z^n=n\mathrm{Ln}z$，可以这样证明：设 $z=re^{i\theta}$，则 $z^n=r^ne^{in\theta}$ 于是

$$\mathrm{Ln}z^n=n\ln|z|+i\mathrm{Arg}(z^n)=n\ln|z|+in\theta+2k\pi i,\quad k=0,\pm1,\pm2\cdots,$$

$$n\mathrm{Ln}z=n(\ln|z|+i\mathrm{Arg}z)=n\ln|z|+in\theta+2nk\pi i,\quad k=0,\pm1,\pm2\cdots,$$

前者取值显然要比后者多，故两式不等. 最后一个式子我让学生自己验证，只是把教材给出结论告诉他们：$\mathrm{Ln}\sqrt[n]{z}=\frac{1}{n}\mathrm{Ln}z$ （当 $n>1$ 时）不成立。正好教材课后习题中第17题，要求判断后两式在 $n=2$ 时是否成立，我就把它作为课后作业布置给学生了.

大多数学生的作业中，对 $\mathrm{Ln}\sqrt{z}=\frac{1}{2}\mathrm{Ln}z$ 是否成立，是这样证明的：设 $z=re^{i\theta}$，则 $\sqrt{z}=\sqrt{r}e^{\frac{i\theta}{2}}$，于是

$$\mathrm{Ln}\sqrt{z}=\ln|\sqrt{z}|+i\times\mathrm{Arg}\sqrt{z}=\frac{1}{2}\ln r+i(\frac{\theta}{2}+2k\pi),\quad k=0,\pm1,\pm2\cdots,$$

$$\frac{1}{2}\mathrm{Ln}z=\frac{1}{2}(\ln|z|+i\times\mathrm{Arg}z)=\frac{1}{2}\ln r+i(\frac{\theta}{2}+k\pi),\quad k=0,\pm1,\pm2\cdots,$$

这样，后者比前者取值要多，故两式不等.

上述解答过程教科书般的解答，我一直没质疑过。可是有学生提出不同的见解，他认为等式 $\mathrm{Ln}\sqrt{z}=\frac{1}{2}\mathrm{Ln}z$ 是成立的。理由是 $\sqrt{z}$ 是多值函数，它的对数应该取其所有的分支的对数，这样一来，两边取值是一样多的. 开始我认为应该是这个学生计算时出了错，我按照他的理解验证后，得出的结果确实与这位学生所说的吻合. 因为设 $z=re^{i\theta}$，则

$$\sqrt{z}=r^{\frac{1}{2}}(\cos\frac{\theta+2m\pi}{2}+i\sin\frac{\theta+2m\pi}{2}),\quad m=0,1,$$

于是

$$w_0=r^{\frac{1}{2}}(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}),\quad w_1=r^{\frac{1}{2}}[\cos(\frac{\theta}{2}+\pi)+i\sin(\frac{\theta}{2}+\pi)],$$

故 $\mathrm{Ln}\sqrt{z}$ 的值由

$$\mathrm{Ln}w_0=\frac{1}{2}\ln r+i(\frac{\theta}{2}+2k\pi),k=0,\pm1,\pm2\cdots,$$

和

$$\mathrm{Ln}w_1=\frac{1}{2}\ln r+i[\frac{\theta}{2}+(2k+1)\pi],k=0,\pm1,\pm2\cdots,$$

两部分构成. 由此可知，它的取值与 $\frac{1}{2}\mathrm{Ln}z$ 完全相同，这就说明：$\mathrm{Ln}\sqrt{z}=\frac{1}{2}\mathrm{Ln}z$.

我讲授复变函数已经好几年了，从来没有质疑过第一种解答方式，因为课本已经明确给出结论，等式不成立，只是没有给出具体解释，把推导的机会留个读者。我以往教过的学生中，也从来没有人提出过不同意见。我又查阅了陈小柱，张立卫编写的大连理工大学出版社出版的《线性代数·复变函数·概率统计习题全解（同济二版·西安交大四版·浙大二版）》的习题解答[2]，他们给出的解答与前面所述的大部分学生的证明方法完全一致。仔细想来，习题解答和前面大多数学生给出的解答过程是有问题的。原因就在于 $\sqrt{z}$ 是多值的，而他们在证明中，对多值函数 $\sqrt{z}$，只取了其中一个分支的值 $\sqrt{r}e^{\frac{i\theta}{2}}$.

但是，我也不敢急于下结论，。其一，我担心自己推导中有什么地方没考虑周全；更主要的是，我认为教材经过四版使用，我想它给出的结论应该是反复推敲过的. 为了稳妥起见，于是我向其他老师请教. 他推导后，告诉我二者应该是相等的，这让我吃了一颗定心丸，准备给学生上习题课时就告诉他们正确的解答.

真是一波不平一波又起，这时有学生又有了新的解答，

证明出等式不成立. 证明是这样的：由已经推导的结论：$\mathrm{Ln}z^2 \neq 2\mathrm{Ln}z$，在式中，令 $z=\sqrt{z}$，则有 $\mathrm{Ln}(\sqrt{z})^2 \neq 2\mathrm{Ln}\sqrt{z}$，即 $\mathrm{Ln}z \neq 2\mathrm{Ln}\sqrt{z}$，两边同时乘以$\frac{1}{2}$得$\frac{1}{2}\mathrm{Ln}z \neq \mathrm{Ln}\sqrt{z}$. 即所证.

上述推理看来似乎天衣无缝，它完全合乎咱们在常理下的推导，那推理究竟正确与否？同事的一个问题启发了我，他问：我们可以证明 $\mathrm{Ln}z_1z_2=\mathrm{Ln}z_1+\mathrm{Ln}z_2$，那么 $\mathrm{Ln}z^2=2\mathrm{Ln}z$ 为什么不成立呢？

我忽然想到，都是多值惹的祸. 仔细推敲，我们会发现学生上面的推理没有考虑到$\sqrt{z}$的多值性，$\mathrm{Ln}(\sqrt{z})^2 \neq 2\mathrm{Ln}\sqrt{z}$，前者只有一个值，而后者有两个. 因为$\mathrm{Ln}z_1z_2=\mathrm{Ln}z_1+\mathrm{Ln}z_2$成立，所以必有$\mathrm{Ln}z^2=\mathrm{Ln}z+\mathrm{Ln}z$，但是$\mathrm{Ln}z^2 \neq 2\mathrm{Ln}z$，由此可知，问题实质上在于：$2\mathrm{Ln}z \neq \mathrm{Ln}z+\mathrm{Ln}z$. 为何？我把这个问题留给了学生.

其实不难解释：设$f(z)$为多值函数，若$z=z_0$时，$f(z_0)$有两个取值1和2，则$2f(z_0)$取值为2和4，而$f(z_0)+f(z_0)$有三个值2，3和4.

然而，讨论到此，最重要的收获，已不再是“$\mathrm{Ln}\sqrt{z}=\frac{1}{2}\mathrm{Ln}z$”或“$\mathrm{Ln}z^2=2\mathrm{Ln}z$”成立与否的决断，而是我和学生一起对复变函数的多值性经历了一次真正的体验和认真的思考。

三、几点思考

1.小问题总能激发小思考。此次复变函数的课后作业，安排给学生解决的，是一个小问题（验证一个等式是否成立），跟整个复变函数知识体系比起来，这个小问题微乎其微，就如同沧海之一粟，对整个复变函数的学习，不会起到任何决定作用。然而，就是因为这是一个小问题，学生觉得自己有能力去解决它，才会不遗余力地对它进行深入思考，反复琢磨，终于有所发现。如果留个学生的是一个高大上的深奥晦涩的大问题，学生可能望而生畏、敬而远之，那就根本调动不了他们的积极性。这让我想到，数学王子高斯，他最引以为傲的成果，是年轻的时候，解决了尺规作图，做一个正十七边形，高斯晚年的时候说到：希望他去世后，把他的墓碑的底座做成正十七边形。高斯的一生，在数学领域硕果累累，可见他多么的看中这一成就。然而，据说高斯是在完全不知道这是一个公开难题的情况下，解决了这一问题的，如果让他知道，这是公开问题，也许他就望而生畏了。一句话，教学生，要多布置一些他们可以触及的小问题，引发他们思考，养成爱思考的习惯。

2.小成就一定能带来小兴趣。兴趣是最好的老师，学习任何一门知识，都要先让学生保持兴趣，让他们尝到甜头，获得成就感，哪怕解决了一个小小的问题，这对他们来说，都会让他们自信满满。学生有了信心，就会去思考更难的问题，解决更加复杂的东西，知识面逐步变宽，解决问题的能力也就慢慢锻炼出来了。小问题激发小思考，小思考获得小成就，小成就带来小兴趣，如此良性循环，让学生从此爱上学习。这就是小问题，推动小进步的一种教学模式.

3.挑战权威向来都需要勇气。当我们面对权威的时候，一般会选择顺从，教师如此，学生更是如此。面对一本由多个专家编写、已经多年使用、经过多次修订的优秀教材，里面的每一个定义，每一个定理，每一个结论，都是经过反复推敲的，一般是不会错的。但是专家也是人，平凡的人，他们也会有思维定式，有思考的盲区。他们的注意力，更多的是集中在知识体系上，可能会忽略一些小细节的斟酌。对于讲授课程的普通教师来讲，也容易产生惯性思维，相信书里那些都是真的，缺乏一种咬文嚼字的精气神，有时候，这也是一种惰性，不想去多想，选择相信权威。对于学生，绝大多数人学习知识都是浅尝搁置，很少深入思考，只有极少数的孩子，初生牛犊不怕虎，有一股子率直，乐于思考，敢于说不。我们要爱护他们，给予他们更多勇气，同时还要引导他们，成就他们，这是我们的责任。长江后浪推前浪，希望一代更比一代强，社会的进步，需要敢于挑战权威的新一代。

4.教学相长从来就不是空话。老想起孟子说的，作为一个老师，最大的快乐，就是得天下英才而教之。学高为师身正为范，名师出高徒，为师的要足够优秀，足够称职，具有高超的专业技能，优良的道德品质，才能交出德才兼备的好学生。发过来，好学生也能成就好老师，学生勤于思考，勇于提问，敢于质疑，这会促使老师，不断学习，提高技艺，完善自我。就像孔老夫子和弟子们之间，学生的提问，激发老师的思考，才能留下儒学经典《论语》。教师和学生应该是相互促进、教学相长的关系。好老师的最大期望就是：有一天，自己教出的学生超过自己。

参考文献：

[1]西安交通大学高等数学教研室.复变函数（第四版）[M]. 北京：高等教育出版社，1996.

[2]陈小柱，张立卫.线性代数·复变函数·概率统计习题全解（同济二版·西安交大四版·浙大二版）[M].大连：大连理工大学出版社，1998.

[3]侯利元，刘念平.以初等多值函数为例对复变函数进行的教学探讨[J].乐山师范学院学报，2021（12）：111-115.

[4]王金花.一类多值函数的单值解析分支 [J].沧州师范学院学报，2016（1）：17-19.

[5]殷凤，王鹏飞.根式函数的单值解析分支的教学探讨[J].忻州师范学院学报，2017（5）：115-118.