

从数学计算的训练来培养学生的核心素养能力

——圆锥曲线中的求面积问题为例

夏伟峰

杭州市长河高级中学

[摘要] 直线与圆锥曲线相交, 围成的平面图形有很多种. 圆锥曲线中的面积问题综合性较强, 解题的主要方法是用代数运算解决几何问题, 运算量较大, 学生容易出错. 选择合适的三角形面积公式, 决定着运算量的大小. 本文所阐述的是使学生会用数学思想方法解决问题, 提高运算效率及思维品质, 从而提升数学核心素养.

[关键词] 面积; 焦点三角形; 向量; 割补; 最值

[DOI] 10.12252/j.issn.2096-6288.2021.11.1777

平面解析几何作为中学数学几何代数化的典型代表, 圆锥曲线更是高中数学平面解析几何的核心内容, 是高考重点考查的内容之一, 与函数、方程、不等式、几何、三角、数列、向量等有机地联系在一起, 又以综合性较高的解答题为主. 历年高考中出现过最难的题目, 基本都是面积问题, 面积问题的难度就体现在计算中, 这就需要选择合适的面积计算方法. 对于解析几何中的面积问题, 主要的解决策略如下:

1、面积计算问题: (1) 直接找三角形的底和高, 用三角形面积公式计算.

(2) 面积的割补: 不规则的多边形的面积通常考虑拆分为多个三角形的面积和, 对于三角形如果底和高不便于计算, 则也可以考虑拆分成若干个易于计算的三角形.

2、面积最值问题: 通常利用公式将面积转化为某个变量的函数, 再求解函数的最值, 在寻底找高的过程中, 优先选择长度为定值的线段参与运算. 这样可以使函数解析式较为简单, 便于分析.

3、圆锥曲线中求三角形面积的常用方法如下:

(1) 弦长公式: $|AB| = \sqrt{1+k^2} |x_1 - x_2| = \sqrt{1+\frac{1}{k^2}} |y_1 + y_2|$,

若点 P 点到直线 AB 的距离为 d,

$$\text{则 } S_{\triangle APB} = \frac{1}{2} |AB| d$$

$$(2) S_{\triangle APB} = \frac{1}{2} \cdot |PA| \cdot |PB| \cdot \sin \angle APB.$$

(3) 割补法: 如 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 直线 AB 过坐标轴上一个点 T, C 点与 T 点在同一条坐标轴上, 则 $\triangle ABC$ 面积可理解为以线段 TC 为底的两个三角形的面积和或面积差. 注意: 点 T 可以不是定点.

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot |TC| \cdot |y_1 - y_2| \text{ 或 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot |TC| \cdot |x_1 - x_2|.$$

(4) 向量法坐标公式: 若 $\triangle ABC$ 满足

$$\overrightarrow{AB} = (x_1, y_1), \overrightarrow{AC} = (x_2, y_2), \text{ 则 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |x_1 y_2 - x_2 y_1|.$$

证明: 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $\overrightarrow{AB} = (x_1, y_1), \overrightarrow{AC} = (x_2, y_2)$,

$$\text{则 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |x_1 y_2 - x_2 y_1|.$$

$$\text{由 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}| \sin A = \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2 |\overrightarrow{AC}|^2 \sin^2 A} = \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2 |\overrightarrow{AC}|^2 - (\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{AC} \cos A)^2}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2 |\overrightarrow{AC}|^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2} = \frac{1}{2} \sqrt{(x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2) - (x_1 x_2 + y_1 y_2)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{(x_1 y_2 - x_2 y_1)^2}$$

$$= \frac{1}{2} |x_1 y_2 - x_2 y_1|$$

我们把上述三角形面积公式称为三角形面积公式的向量式, 该面积公式在解析几何中有广泛且深刻的应用.

$$(5) \text{ 内接圆 } S = \frac{1}{2} r l_{\text{周长}}$$

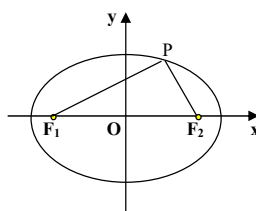
$$(6) \text{ 焦点三角形面积公式 } S_{\triangle F_1 P F_2} = b^2 \tan \frac{\theta}{2}$$

一、焦点三角形面积问题

焦点三角形是圆锥曲线中的经常出现的经典模型, 理解和掌握焦点三角形的面积公式可以起到化繁为简的神奇作用.

定理 在椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 中, 焦点分别为 F_1, F_2 , 点 P 是椭圆上任意一点, $\angle F_1 P F_2 = \theta$,

$$\text{则 } S_{\triangle F_1 P F_2} = b^2 \tan \frac{\theta}{2}.$$



证明: 记 $|PF_1| = r_1, |PF_2| = r_2$, 由椭圆的第一定义得

$$\text{在 } \triangle F_1 P F_2 \text{ 中, 由余弦定理得: } r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos \theta = (2c)^2.$$

$$\text{配方得: } (r_1 + r_2)^2 - 2r_1 r_2 - 2r_1 r_2 \cos \theta = 4c^2.$$

$$\text{即 } 4a^2 - 2r_1 r_2 (1 + \cos \theta) = 4c^2.$$

由任意三角形的面积公式得:

$$S_{\triangle F_1 P F_2} = \frac{1}{2} r_1 r_2 \sin \theta = b^2 \cdot \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} = b^2 \cdot \frac{2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}}{2 \cos^2 \frac{\theta}{2}} = b^2 \cdot \tan \frac{\theta}{2}.$$

例1: 已知 F_1, F_2 是椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的两个焦

点, P 为椭圆 C 上的一点, 且 $\angle F_1 P F_2 = 60^\circ$, $S_{\triangle F_1 P F_2} = 3\sqrt{3}$, 则 $b =$ _____.

解析: 方法 (一) 用正余弦定理

由题意得 $|PF_1| + |PF_2| = 2a$ ，又 $\angle F_1PF_2 = 60^\circ$ ，

所以 $|PF_1|^2 + |PF_2|^2 - 2|PF_1||PF_2|\cos 60^\circ = |F_1F_2|^2$ ，

所以 $(|PF_1| + |PF_2|)^2 - 3|PF_1||PF_2| = 4c^2$ ，

所以 $3|PF_1||PF_2| = 4a^2 - 4c^2 = 4b^2$ ，

$$\text{所以 } |PF_1||PF_2| = \frac{4}{3}b^2,$$

$$\text{所以 } S_{\Delta PF_1F_2} = \frac{1}{2}|PF_1||PF_2|\sin 60^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{4}{3}b^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}b^2 = 3\sqrt{3}, \text{ 所以 } b=3.$$

方法（二）焦点三角形面积公式

因为 $\theta = 60^\circ$ ，则 $S_{\Delta PF_1F_2} = b^2 \tan \frac{\theta}{2} = b^2 \tan 30^\circ = 3\sqrt{3}$ ，则 $b^2 = 9$ ，所以 $b=3$ 。

评注：从两个解法看，法二简洁明了。

例2：已知 F_1 和 F_2 为双曲线 $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ 的两个焦点，点 P 在

双曲线上且满足 $\angle F_1PF_2 = \frac{\pi}{2}$ ，求 ΔF_1PF_2 的面积

解析：方法（一） $(|PF_1| - |PF_2|)^2 = 4a^2 = 16$ （双曲线第一定义），而由勾股定理得 $|PF_1|^2 + |PF_2|^2 = (2c)^2 = 20$ ，

$$|F_1P| \cdot |F_2P| = \frac{1}{2} [|PF_1|^2 + |PF_2|^2 - (|PF_1| - |PF_2|)^2] = \frac{1}{2} \times (20 - 16) = 2$$

$$\therefore S_{\Delta F_1PF_2} = \frac{1}{2} \times |F_1P| \cdot |F_2P| = \frac{1}{2} \times 2 = 1$$

方法（二）焦点三角形面积公式

$$S_{\Delta PF_1F_2} = b^2 \tan \frac{\theta}{2} = 1 \cdot \tan 45^\circ = 1$$

评注：求解焦点三角形的面积若是结合圆锥曲线的定义，用余弦定理得出三角形边与角的关系式，再用正弦定理算面积，设而不求，往往能事半功倍，极大地减少计算量。法二直接用焦点三角形面积公式更为简洁，学生易于接受。

二、直接用三角形面积公式

结合图象，利用弦长公式和点到直线距离公式，直接找三角形的底和高，用三角形面积公式计算，返璞归真。

例3（2021年4月高三交流卷）

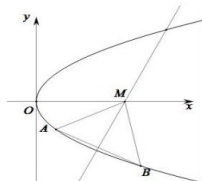
已知抛物线 $C: y^2 = 2x$ 上不同两点 A 、 B 关于直线 l 对称，直线 l 过 x 轴上定点 M 。

（I）若 M 为抛物线 C 的焦点，求证： $AB \perp x$ 轴；

（II）若直线 l 不与 x 轴重合， ΔMAB 的面积 S 取

最大值时 $AM \perp BM$ ，求 M 点的坐标。

解析：（I）（抛物线的焦半径）



证：由题意，此时 $M(\frac{1}{2}, 0)$ 。设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 。

因为 A 、 B 关于直线 l 对称，故 $|MA| = |MB|$ 。

即 $x_1 + \frac{1}{2} = x_2 + \frac{1}{2}$ ，得 $x_1 = x_2$ 。所以 $AB \perp x$

轴。证完

（设联消韦判、基本不等式）

（II）设直线 $AB: x = my + t (m \neq 0)$ ， $M(s, 0)$ 。

所以直线 $l: x = -\frac{1}{m}y + s$ 。

$$\text{由 } \begin{cases} x = my + t \\ y^2 = 2x \end{cases} \text{ 得 } y^2 - 2my - 2t = 0. \text{ 所以 } y_1 + y_2 = 2m, y_1y_2 = -2t. \quad \textcircled{1}$$

由 $\Delta = 4m^2 + 8t > 0$ 得 $m^2 + 2t > 0$ 。

由 $\textcircled{1}$ 可得 AB 的中点坐标为 $(m^2 + t, m)$ ，其在直线 l 上，故 $s = m^2 + t + 1$ 。

显然， AB 的中点在 y 轴右侧，故 $m^2 + t > 0$ ，进而 $s > 1$ 。

$$\text{又 } |AB| = \sqrt{1+m^2}|y_1 - y_2| = \sqrt{1+m^2} \cdot \sqrt{(y_1 + y_2)^2 - 4y_1y_2} = 2\sqrt{1+m^2} \cdot \sqrt{m^2 + 2t}.$$

点 M 到直线 AB 的距离为 $d = \frac{|s-t|}{\sqrt{1+m^2}}$

$$\text{故 } S = \frac{1}{2}|AB| \cdot d = \sqrt{m^2 + 2t} \cdot |s-t| = \sqrt{s+t-1} \cdot (s-t)$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}(2s+2t-2)(s-t)(s-t)} \leq \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{4s-2}{3}\right)^3}$$

当且仅当 $2s+2t-2 = s-t$ ，即 $t = \frac{2-s}{3}$ 时等号成立。

因为此时 $AM \perp BM$ ，故 $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$ ，即 $(x_1 - s)(x_2 - s) + y_1y_2 = 0$ 。

整理得 $t^2 - 2s(s-1) + s^2 - 2t = 0$ 。

将 $t = \frac{2-s}{3}$ 代入上式，解得 $s=2$ 或 $s = \frac{2}{7}$ 。

而由于 $s > 1$ ，故 $s=2$ 。

所以 M 点的坐标为 $(2, 0)$ 。

评注：从三角形的面积公式入手，找底和高，直接计算，符合逻辑习惯。

三、用向量坐标公式求面积

借助向量的坐标运算来求三角形的面积，可以方便快捷，一步到位。

例4：（2014年第二十五届“希望杯”全国数学邀请赛（高二）试题）在平面直角坐标系 xOy 中， ΔABC 的两个顶点是 $A(3, 0)$ ， $B(0, 4)$ ，若点 C 在抛物线 $y^2 = -2x$ 上，则 ΔABC 的面积的最小值是（ ）

- (A) $\frac{87}{16}$ (B) $\frac{178}{16}$ (C) $\frac{217}{16}$ (D) $\frac{435}{16}$

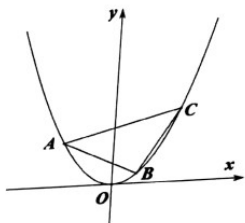
解析：设 $C(-2t^2, 2t)$ ，则 $\overrightarrow{AC} = (-2t^2 - 3, 2t)$ ，

$$\overrightarrow{BC} = (-2t^2, 2t - 4) \Rightarrow S_{\Delta ABC} = 4t^2 - 3t + 6 \geq \frac{87}{16}. \text{ 故选 (A).}$$

注：用此方法也可以解决例3的面积

$$S = \frac{1}{2} |(x_1 - s)y_2 - (x_2 - s)y_1|$$

练：（2021年1月湖州高三期末卷）如图，已知点A, B, C是抛物线 $x^2 = y$ 上的三个不同的点，且 $\triangle ABC$ 是以点B为直角顶点的等腰直角三角形。



(I) 若直线BC的斜率为1，求顶点B的坐标；

(II) 求三角形ABC的面积的最小值。

解析 (1)：根据题意，

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3), x_1 < x_2 < x_3$ ，则

$$k_{AB} = \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1 - x_2} = x_1 + x_2 = -1, k_{BC} = x_3 + x_2 = 1,$$

$$|AB| = \sqrt{2}(x_2 - x_1) = \sqrt{2}(x_3 - x_2) \Rightarrow x_2 = 0$$

所以顶点的坐标为 (0, 0)

(2) 根据题意，由对称性可知设

$A(x_1, x_1^2), B(x_2, x_2^2), C(x_3, x_3^2), x_1 < 0 \leq x_2 < x_3$ ，因为 $\triangle ABC$ 是以点B为直角顶点的等腰直角三角形，所以

$$k_{AB} \cdot k_{BC} = (x_1 + x_2) \cdot (x_3 + x_2) = -1, \textcircled{1}$$

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (x_2^2 - x_1^2)^2} = (x_2 - x_1) \sqrt{1 + (x_2 + x_1)^2}$$

$$|CB| = \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (x_3^2 - x_2^2)^2} = (x_3 - x_2) \sqrt{1 + (x_2 + x_3)^2}, \text{由} |CB| = |BA| \text{ ②可得}$$

$$(x_2 - x_1) = \frac{(x_3 - x_2) \sqrt{1 + (x_2 + x_3)^2}}{\sqrt{1 + (x_2 + x_1)^2}} = (x_3 - x_2) \sqrt{\frac{1 + (x_2 + x_3)^2}{1 + (x_2 + x_1)^2}} = \frac{(x_3 - x_2)}{|x_2 + x_1|}$$

又因为 $\overline{BA} = (x_1, x_1^2) - (x_2, x_2^2) = (x_1 - x_2, x_1^2 - x_2^2), \overline{BC} = (x_3 - x_2, x_3^2 - x_2^2)$ ，所以

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |(x_1 - x_2)(x_3^2 - x_2^2) - (x_1^2 - x_2^2)(x_3 - x_2)| = \frac{1}{2} (x_2 - x_1)(x_3 - x_2) |(x_3 + x_2) - (x_1 + x_2)|$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \frac{(x_3 - x_2)^2}{|x_2 + x_1|} \left| \frac{-1}{x_1 + x_2} - (x_1 + x_2) \right| = \frac{1}{2} \frac{(x_3 - x_2)^2}{|x_2 + x_1|} \left| \frac{1}{x_1 + x_2} + (x_1 + x_2) \right| = \frac{1}{2} (x_3 - x_2)^2 \left| \frac{1}{(x_1 + x_2)^2} + 1 \right|$$

先看成关于 x_2 为主变元的函数，则 $S_{\triangle ABC} \geq \frac{1}{2} x_3^2 \left| \frac{1}{x_1^2} + 1 \right| = \frac{1}{2} (1 + x_1^2) = 1$ ，等号当且仅当

$x_2 = 0, x_1 = -1, x_3 = 1$ 取到。

评注：由于解析几何中面积问题有许多可以直接表示出三角形的三个顶点，所以，有关构成的三角形面积问题，可用其向量式解决，即已知三点求三角形面积，用向量公式解决方便多了。

四、用分割法求面积

从图形的结构出发，通过分割和拼接图形，转换为熟悉的图形形状来求解，降低难度，减少运算量，达到解决问题的目标。

例5：（2021年4月宁波二模）

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{m^2} + y^2 = 1 (m > 1)$ 的左右焦点分别为

F_1, F_2 ，过右焦点 F_2 作直线 l 交椭圆 C 于 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ ，其中 $y_1 > 0, y_2 < 0$ ， $\triangle AF_1F_2, \triangle BF_1F_2$ 的重心分别为 G_1, G_2 。

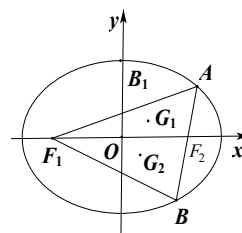
(I) 若 G_1 坐标为 $(\frac{1}{3}, \frac{1}{6})$ ，求椭圆 C 的方程；

(II) 设 $\triangle BF_1G_1$ 和 $\triangle ABG_2$ 的面积为 S_1 和 S_2 ， $\frac{4}{3} \leq \frac{S_1}{S_2} \leq \frac{5}{3}$ ，

求实数 m 的取值范围。

解析：(I) 由题得 $A(1, \frac{1}{2})$ ，故 $\frac{1}{m^2} + \frac{1}{4} = 1$ ，所以 $m^2 = \frac{4}{3}$ 。

椭圆 C 的方程为 $\frac{3}{4}x^2 + y^2 = 1$ 。



(II) 设 $F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$ ，则 $m^2 = c^2 + 1$ 。

$$S_1 = S_{\triangle BOF_1} + S_{\triangle GO_1F_1} + S_{\triangle GO_1OB} = S_{\triangle BOF_1} + \frac{1}{3} S_{\triangle AO_1F_1} + \frac{1}{3} S_{\triangle AO_1OB} = -\frac{1}{2} cy_2 + \frac{1}{6} cy_1 + \frac{1}{6} c(y_1 - y_2)$$

$$= \frac{c}{3}(y_1 - 2y_2), S_2 = \frac{2}{3} S_{\triangle ABO} = \frac{1}{3} c(y_1 - y_2).$$

$$\text{则 } \frac{S_1}{S_2} = \frac{y_1 - 2y_2}{y_1 - y_2} \in \left[\frac{4}{3}, \frac{5}{3} \right], \text{得 } \frac{y_1}{y_2} \in \left[-2, -\frac{1}{2} \right].$$

设 $l: x = ty + c$ ，联立椭圆方程 $C: \frac{x^2}{m^2} + y^2 = 1 (m > 1)$ ，得 $(t^2 + m^2)y^2 + 2tcy - 1 = 0$ 。

$$\text{由韦达定理得 } y_1 + y_2 = \frac{-2tc}{t^2 + m^2}, y_1 y_2 = \frac{-1}{t^2 + m^2},$$

$$\text{则 } \frac{y_1}{y_2} + \frac{y_2}{y_1} = \frac{(y_1 + y_2)^2}{y_1 y_2} - 2 \in \left[-\frac{5}{2}, -2 \right].$$

$$\text{所以 } 0 \leq \frac{4t^2 c^2}{t^2 + m^2} \leq \frac{1}{2}, (8m^2 - 9)t^2 \leq m^2 \text{ 对 } t \text{ 恒成立,}$$

$$\text{所以 } 8m^2 - 9 \leq 0, \text{所以 } 1 < m \leq \frac{3\sqrt{2}}{4}.$$

评注：此类题将一个三角形分割成几个小三角形求解简便易行（小三角形一边的长易求，对应边上的高与三角形顶点纵（横）坐标有着密切的联系）。

五、三角换元求面积

圆锥曲线方程的三角换元（或者参数方程），是一种计算比较有效方便的工具，很多计算的时候可以起到“化腐朽为神奇”的作用。

例6：（2015浙江高考）已知椭圆 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 上两个不同的

点A, B关于直线 $y = mx + \frac{1}{2}$ 对称.

- (1) 求实数m的取值范围;
- (2) 求 $\triangle AOB$ 面积的最大值 (O为坐标原点).

解析:

(1) 由题意知 $m \neq 0$, 可设直线AB的方程为 $y = -\frac{1}{m}x + b$.

$$\text{由} \begin{cases} \frac{x^2}{2} + y^2 = 1 \\ y = -\frac{1}{m}x + b \end{cases}, \text{消去} y, \text{得} (\frac{1}{2} + \frac{1}{m^2})x^2 - \frac{2b}{m}x + b^2 - 1 = 0.$$

\therefore 直线 $y = -\frac{1}{m}x + b$ 与椭圆 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 有两个不同的交点, $\therefore \Delta = -2b^2 + 2 + \frac{4}{m^2} > 0$,

①,

将 AB 中点 $M(\frac{2mb}{m^2+2}, \frac{m^2b}{m^2+2})$ 代入直线方程 $y = mx + \frac{1}{2}$ 解得 $b = -\frac{m^2+2}{2m^2}$ ②.

由①②得 $m < -\frac{\sqrt{6}}{3}$ 或 $m > \frac{\sqrt{6}}{3}$.

(2)

设 $A(\sqrt{2}\cos\alpha, \sin\alpha)$, $B(\sqrt{2}\cos\beta, \sin\beta)$. 则 OA 直线方程为: $x\sin\alpha - \sqrt{2}y\cos\alpha = 0$.

$$S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} |OA| \cdot |OB| \cdot \sin(\alpha - \beta) = \frac{1}{2} \sqrt{2\cos^2\alpha + \sin^2\alpha} \sqrt{2\cos^2\beta + \sin^2\beta} \frac{|\sin\alpha\cos\beta - \sqrt{2}\cos\alpha\sin\beta|}{\sqrt{\sin^2\alpha + 2\cos^2\alpha}}$$

$$S_{\triangle OAB} = \frac{\sqrt{2}}{2} |\sin(\alpha - \beta)| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{又} \begin{cases} \frac{\sqrt{2}\cos\alpha + \sqrt{2}\cos\beta}{2} = -\frac{1}{m} \\ \frac{\sin\alpha + \sin\beta}{2} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

得 $\cos(\alpha - \beta) = \frac{1}{m^2} - \frac{1}{2}$, 所以 $\sin^2(\alpha - \beta) = 1 - (\frac{1}{m^2} - \frac{1}{2})^2$.

当且仅当 $m = \pm\sqrt{2}$ 时, 满足 $m \in (-\infty, -\frac{\sqrt{6}}{3}) \cup (\frac{\sqrt{6}}{3}, +\infty)$.

故 $\triangle AOB$ 面积的最大值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

评注: 圆锥曲线中面积最值问题转化为函数问题, 利用三角函数的有界性采用三角换元可以使计算更为简单, 更易于求面积最值问题.

(上接第3493页)

在闯关游戏中, 从第一个关卡“凤鸣麟出: 火眼金睛”的拼读音节到最后的“威风祥麟: 能说会道”介绍学校三个展馆, 整个过程遵循了语文学科学习内容的发展顺序——从音节到字词句篇及语言的积累运用和人文创新.

(四) 多维评价促发展

本次游园活动既有与语文教学进度相衔接的闯关内容, 又有课外知识的拓展, 进一步细化成具体可操作的闯关游戏. 学生从“火眼金睛”到“能说会道”的闯关过程中, 他们的语言智能、逻辑数学智能、身体运动智能、视觉空间智能得到相应的发展与提升.

六、与三角形内切圆有关

内切圆与三角形各边都相切, 利用切线和连接切点与圆心的直线垂直的特点, 可以构造三角形, 利用垂直来分解求面积, 可以和三角形周长、圆锥曲线的定义建立联系, 方便解题.

例7: 已知点P为双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 右支上一点, 点 F_1, F_2 分别为双曲线的左、右焦点, 点I是 $\triangle PF_1F_2$ 的内心 (三角形内切圆的圆心), 若恒有 $S_{\triangle MPF_1} - S_{\triangle MPF_2} \geq \frac{1}{3} S_{\triangle F_1F_2}$ 成立, 则双曲线的离心率的取值范围是 ()

A. (1, 2] B. (1, 2) C. (0, 3] D. (1, 3]

解析:

设 $\triangle PF_1F_2$ 的内切圆半径为r, 由双曲线的定义得

$$|PF_1| - |PF_2| = 2a, |F_1F_2| = 2c, S_{\triangle MPF_1} = \frac{1}{2} |PF_1| \cdot r,$$

$$S_{\triangle MPF_2} = \frac{1}{2} |PF_2| \cdot r, S_{\triangle MF_1F_2} = \frac{1}{2} \cdot 2c \cdot r = cr,$$

由题意得 $\frac{1}{2} |PF_1| \cdot r - \frac{1}{2} |PF_2| \cdot r \geq \frac{1}{3} cr$ 故

$$c \leq \frac{3}{2} (|PF_1| - |PF_2|) = 3a, \text{故} e = \frac{c}{a} \leq 3$$

所以, 双曲线的离心率的取值范围是 (1, 3], 故选D.

评注: 从三角形的内心定义出发, 利用内切圆半径解决三角形的面积问题, 往往会出其不意.

新课程改革深入的今天, 数学运算作为核心素养之一, 是数学课堂教学的重要部分, 应该成为教学发展的历程. 我们要让每一次数学练习训练都成为提升学生核心素养的无声的“对话”. 通过这种“对话”, 教师可以从中得到教与学的信息反馈, 了解学生对所学知识内容掌握的程度, 同时也有利于调整教学内容的进度, 引发教学方法的改进与创新, 学生也可不断改进学习方法, 养成良好的学习习惯, 不断加强数学的计算能力, 提升自我的核心素养能力.

参考文献

[1] 王郁图. 焦点三角形面积的计算方法再探. 数学通讯, 2007 (5)
 [2] 谢新华. 探析圆锥曲线中面积问题的求解策略. 上海中学数学. 2019. 11
 [3] 杨子棉. 例谈圆锥曲线中面积问题的解决策略. 中学生数理化. 2020. 3

参考文献

[1] 高天明, 二十世纪我国教学方法变革研究[D], 西北师范大学, 2001. 04
 [2] 范守信, 教学方法改革的症结与出路[J], 中国高等教育, 2006. 15
 [3] 朱利霞, 我国中小学教学方法的反思与重建[D], 广西师范大学, 2001. 04
 [4] 刘雪梅、张宝臣, 有效进行教学方法改革的几个基本问题[J], 佳木斯大学社会科学学报, 2010. 08