# 基于核心素养的圆锥曲线“点差法”问题分析

谷欠欠　黄华平

重庆三峡学院 数学与统计学院　重庆　万州　404020

[摘　要]“点差法”，顾名思义，就是代入点进行作差的方法.将圆锥曲线和直线的两个交点坐标分别代入到圆锥曲线的方程，从而得到两个等式，将两式相减，便可得到有关于直线斜率和弦中点坐标的关系式，再结合已知条件便可使问题得以解决.本文结合一些实例，谈谈点差法在圆锥曲线问题中的应用，分析在培养学生能力的同时，如何落实提升学生的数学核心素养.

[关键词]点差法；核心素养；圆锥曲线

【DOI】10.12252/j.issn.2096-6288.2021.12.340

圆锥曲线是每年高考重要考查点之一，基础题目主要考查定义与方程、几何性质，解答题通常考查直线与椭圆、双曲线以及抛物线的位置关系、弦中点问题、定点问题、定值问题轨迹问题、取值范围问题及证明问题.当问题与弦的中点、斜率有关时，我们优先选择用“点差法”求解，不同于利用韦达定理复杂繁琐的计算，运用“点差法”可以很大地缩减计算量，简化解题过程，提高解题效率[1].解题思路就是常说的“设而不求，整体代入”，设计巧妙，简单实用是“点差法”的显著优点.由于核心素养在考试大纲中明确提出，所以核心素养在试题中也会有所体现，如何理解和掌握这类问题的本质，笔者接下来将通过具体例子讨论“点差法”在圆锥曲线中的应用.

## 一、求中点弦方程

例1　如果椭圆$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}=1$的弦被点(4，2)平分，求这条弦所在的直线方程.

解　设弦为$AB$，且$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，代入椭圆方程得$\frac{{x_1}^2}{36}+\frac{{y_1}^2}{9}=1$，$\frac{{x_2}^2}{36}+\frac{{y_2}^2}{9}=1$，两式作差化简得$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=-\frac{x_1+x_2}{4(y_1+y_2)}=-\frac{1}{2}$，即弦的斜率为$-\frac{1}{2}$，由点斜式得$y-2=-\frac{1}{2}(x-4)$，化简得$y=-\frac{1}{2}x+4$.

[评注]本题求中点弦的方程，与联立方程不同，本题直接采用“点差法”从而得到弦斜率与弦中点的关系式，中点已知，故可得到直线斜率，再利用点斜式即可求解.通过本题可培养学生的数学运算、逻辑推理、直观想象等数学核心素养.

[变式]点$P(8,1)$是平分双曲线$x^2-4y^2=4$的一条弦，求这条弦所在直线的方程.

## 二、求圆锥曲线方程

例2　已知椭圆$E$：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，$a>b>0$的右焦点为$F(3,0)$，过点$F$的直线交椭圆$E$于$A$、$B$两点.若$AB$的中点坐标为(1，-1)，求椭圆$E$的方程.

解　已知$c=3$，设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则$\frac{{x_1}^2}{a^2}+\frac{{y_1}^2}{b^2}=1$，$\frac{{x_2}^2}{a^2}+\frac{{y_2}^2}{b^2}=1$，

又已知$AB$的中点坐标为(1，-1)，则$x_1+x_2=2$，$y_1+y_2=-2$，

1 由两式相减并化简可得$\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x_1+x_2}{y_1+y_2}=-\frac{b^2}{a^2}\times(-1)=\frac{b^2}{a^2}$，

因为$\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{0+1}{3-1}=\frac{1}{2}$，所以$\frac{b^2}{a^2}=\frac{1}{2}$，$a^2=2b^2$，

又$a^2=b^2+c^2=b^2+9$，所以$b^2=9$，$a^2=18$，即$E$的方程为$\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{9}=1$.

[评注]本题已知椭圆焦点和弦中点坐标，让求椭圆方程.先设出两交点坐标，再代入椭圆方程进行作差，化简整理即可得到椭圆长半轴和短半轴之间的关系，从而求出椭圆的方程.通过本题可培养学生的数学运算、数学抽象、直观想象、逻辑推理等数学核心素养.

[变式]已知抛物线$C$：$y^2=2px(p>0)$，过其焦点$F$作斜率为1的直线交抛物线$C$于$A$，$B$两点，且线段$AB$的中点的纵坐标为4，求抛物线$C$的标准方程.

## 三、由弦中点求定值

例3　已知双曲线$\frac{x^2}{2}-y^2=1$与不过原点$O$且不平行于坐标轴的直线$l$相交于$M$，$N$两点，线段$MN$的中点为$P$，设直线$l$的斜率为$k_1$，直线$OP$的斜率为$k_2$，则$k_1k_2=$_______.

解　设$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，则$\frac{{x_1}^2}{2}-{y_1}^2=1$，$\frac{{x_2}^2}{2}-{y_2}^2=1$.此两式相减，并化简得

$$\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{x_1+x_2}{y_1+y_2}.$$

因为线段$MN$的中点为$P$，且直线$OP$的斜率为$k_2$，所以$k_2=\frac{\frac{y_1+y_2}{2}}{\frac{x_1+x_2}{2}}=\frac{y_1+y_2}{x_1+x_2}$.上式可化为$k_1=\frac{1}{2k_2}$，变形可得$k_1k_2=\frac{1}{2}$.

[评注]本题已知双曲线方程，让求解两斜率的乘积.同样还是先设两交点坐标，然后将点的坐标分别代入双曲线的方程并进行作差，即可得到与两斜率相关的式子，从而此题得到解答.通过此题可培养学生的数学运算、直观想象、数学抽

象等数学核心素养.

[变式]过点$M(-2,0)$的直线$l$与椭圆$x^2+2y^2=2$交于$P_1$，$P_2$两点，线段$P_1P_2$中点为$P$，设直线$l$的斜率为$k_1(k_1\neq 0)$，直线$OP$的斜率为$k_2$($O$为原点)，则$k_1\cdot k_2$的值为_______.

通过上面的几个例子，可以看出利用“点差法”求解的优势，计算简洁，求解快速，避免了常规方法中的复杂计算，那么“点差法”是否适用于任意条件呢？我们来看下面的这道例题.

例4　已知双曲线$2x^2-y^2=2$，过点$A(1，1)$作直线$l$交双曲线于$P$、$Q$两点，并且$PQ$的中点为$A$.判断直线$l$是否存在，若存在，求出它的方程；若不存在说明理由.

解　设$P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2)$，则$2{x_1}^2-{y_1}^2=2,2{x_2}^2-{y_2}^2=2$，

两式相减得，$2(x_1+x_2)(x_1-x_2)-(y_1+y_2)(y_1-y_2)=0$.

因为$PQ$的中点为$A$，所以$4(x_1-x_2)-2(y_1-y_2)=0$，化简得$\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=2$.

所以直线$l$存在，方程为$2x-y-1=0$.

解答到这似乎此题就完成了，是否真的完成了呢？

我们联立直线于双曲线的方程，消去$y$，化简得$2x^2-4x+3=0$

因为$\Delta<0$，所以直线与双曲线没有公共点，即直线$l$不存在.

这是怎么回事呢，两种方法好像都没有错，但是最终得到的结论却相反.

[评注]这题就在提醒我们，“点差法”有它的局限性，同韦达定理类似，用“点差法”时也一定要记得检验[2].至于为什么会有局限性，我们不妨来看一下“点差法”结论的推导过程.

以在椭圆中的推导过程为例，双曲线、抛物线的推导过程同理可得.

设直线$l$与椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的交点为$A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$两点$(x_1\neq x_2)$，线段$AB$的中点为$P(x_0,y_0)$，则有$x_0=\dfrac{x_1+x_2}{2}$，$y_0=\dfrac{y_1+y_2}{2}$.因为点$A$、$B$在椭圆上，所以有$\begin{cases}\dfrac{{x_1}^2}{a^2}+\dfrac{{y_1}^2}{b^2}=1\\ \dfrac{{x_2}^2}{a^2}+\dfrac{{y_2}^2}{b^2}=1\end{cases}$，

两式作差得$\dfrac{{x_1}^2-{x_2}^2}{a^2}+\dfrac{{y_1}^2-{y_2}^2}{b^2}=0$，即$\dfrac{(x_1+x_2)(x_1-x_2)}{a^2}+\dfrac{(y_1+y_2)(y_1-y_2)}{b^2}=0$，

化简得$\dfrac{2x_0(x_1-x_2)}{a^2}+\dfrac{2y_0(y_1-y_2)}{b^2}=0$，即$\dfrac{2x_0}{a^2}+\dfrac{2y_0(y_1-y_2)}{b^2(x_1-x_2)}=0$.

设直线$AB$的斜率为$k_{AB}$，$k_{AB}=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$，则$k_{AB}=-\dfrac{b^2}{a^2}\cdot\dfrac{x_0}{y_0}$.

同理可得在双曲线中的结论：$k_{AB}=\dfrac{b^2}{a^2}\cdot\dfrac{x_0}{y_0}$.

同理可得在抛物线中的结论：$k_{AB}=\dfrac{p}{y_0}$.

从上述推导过程中可以看出，“点差法”的结论并不是直线与圆锥曲线有两个交点以及直线斜率存在的充分条件，它只是必要条件.所以“点差法”是有局限性的，在使用时必须保证直线与圆锥曲线有两个交点并且直线斜率存在，否则这些结论是没有意义的.

总而言之，圆锥曲线中关于“点差法”的问题，其实就是将点代入方程，然后将两方程作差，通过化简变形即可得到直线斜率与弦中点坐标的关系.通过“点差法”求解圆锥曲线的题型有很多种，本文主要讨论了利用“点差法”求中点弦方程、求圆锥曲线方程以及由弦中点求定值.有关于圆锥曲线的问题考查的综合性都比较强，尤其是关于点差法的问题，解题过程中用到了多种数学思想，主要有数形结合思想、函数与方程思想、分类讨论的思想、化归与转化思想等，通过这类题型的考查，可培养学生的数学运算、直观想象、逻辑推理、数学抽象等数学核心素养的培养[3].

从教师的角度，也就是从“教”的角度来看，教师应将上述解题方法和思路结合起来，在讲题时应更加注重解释该方法的解题过程，用“素养导向”来代替之前的“知识导向”，让学生在独立或合作探究中体会到学习数学的喜悦与乐趣.教师在学生喜悦的情景下有意培养学生的解题能力，同时落实到学生核心素养的培养.关于培养学生核心素养的教学模式，数学教师们进行了许多尝试，比如“翻转课堂模式”“先学后教模式”“以问导学模式”等.从学生的角度，也就是从“学”的角度来看，应该把应用点差法的解题思路，以类似的方式创造性地学习其他知识，积极地配合好教师的主导性，以此来做好自己的主体性，在提高自己解题本领的同时，有意识地站在命题者的角度思考问题，看清“核心素养”的考查方法，学会随机应变、融会贯通，真正领悟题目的本质，成为一名具有核心素养的学生.

**参考文献**

[1]陈国辉.用点差法解圆锥曲线的弦中点问题[J].数理化解题研究：高中版，2016，0(1)：6-6

[2]张明.点差法在圆锥曲线中的应用和局限性[J].数学学习与研究，2017，0(13)：110-110

[3]陈耀.基于核心素养的圆锥曲线离心率问题分析[J].中小学教学研究，2019，0(2)：44-48

作者简介:

谷欠欠(1996-)，女，安徽宿州人，硕士研究生，研究方向为学科教学(数学)

基金项目：重庆三峡学院教改项目(JGZC2124，JGYB2003，XYJG202108)