数形结合在解题中的应用

黄丽妹
广西田阳高中

[摘　要]高中数学在培养学生逻辑思维方面起着重要作用，高中生应具备数形结合的思想。数与形的结合具有形象、简洁、直观的特点，“数”具有准确性，而“形”具有直观性，数与形相结合，把复杂抽象的数学问题用直观的图像展示出来，把问题由抽象变具体。本文先概述数形结合思想在数学中的应用，然后通过具体的例子展示如何用数形结合来解题，最后总结数学结合的思想。

[关键词]数形结合；逻辑思维；高中数学
【DOI】10.12252/j.issn.2096-6288.2021.12.828

一、数形结合的概念

数形结合是解决数学问题的一种常见思维方法。许多问题都可以用数与形相结合的方法轻松解决，且解决方法简单易行。数形结合思想是根据数与形的一一对应关系，依据数与形的相互变换来解决数学问题的一种重要方法。数形结合思维的结合通过“形帮助数，数解决形”的关系，把抽象问题具体化、复杂问题简单化的逻辑思维，有助于探究数学问题的本质，把数学规律灵活运用。

二、数形结合思想的价值

用数形结合思想可能解决许多数学问题，加深我们对数学问题本质的理解，使数学更丰富、更具创造性的。该思想具有以下优点：第一，数形结合使学生思维灵活，过程简单，方法多样。第二、数形结合为解数学题提供了解题思路，解题方法更加具有创造性和灵活性；第三，数形结合的能丰富学生的思想内涵，能引起大家的共鸣，帮助学生拓宽解题思路，不在局限一种解题方法。第四，数形结合思维可以提高学生的动手操作能力、数形转换能力和迁移思维能力。

三、数形结合解决的具体数学问题

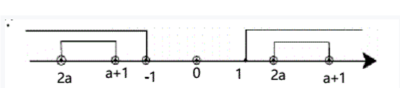
巧用数形结合的思想方法解决高考试题，起到了事半功倍的成效，数形结合的解题方法在高中教材中得到广泛的应用。比如：集合问题、函数与图像的关系、方程与不等式的问题、三角函数的问题、复数问题等等。本文就针对数形结合的思想在解题中的应用谈谈具体如何实施的，并结合例题做系统的分析。

1、数形结合解决集合问题

在集合问题中，为使问题简化，常用韦恩图和数轴解决集合的交并补问题。

例1、已知集合 $A=\{x\mid x<-1,或x\geq 1\}$，$B=\{x\mid 2a<x<a+1,a<1\}$，$B\subseteq A$，求实数$a$的取值范围。

解：$a<1,\therefore 2a<a+1$　$\therefore B\neq\Phi$　画出数轴分析，如图所示



由图可知，当$B\subseteq A$，需要$2a\geq 1$或$a+1\leq -1$，即是$a\geq\frac{1}{2}$或$a\leq -2$

又$\because a<1$，所以实数a的取值范围是$a\leq -2$或$\frac{1}{2}\leq a<1$。

评注：借助图形来处理集合与集合的关系，使集合之间的关系更加直观，抽象的集合问题得到有效的解决。

2、数形结合解决函数问题

函数的图像和解析式是紧密相连的，比如，一次函数、二次函数、指数函数、对数函数等都隐藏着数形结合的思想，对轻易画出函数图像的函数，利用图像解决问题会更容易，所以在解决函数问题时候，数形结合是非常重要的。

例2、已知二次函数$f(x)=x^2+x+a(a>0)$，若$f(m)<0$，则$f(m+1)$的值是（）

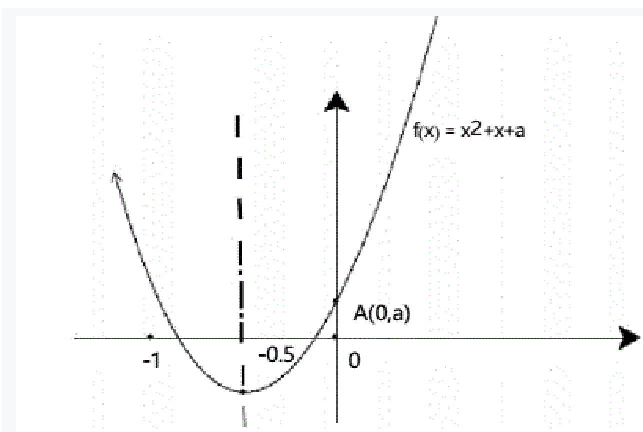
A、正数　B、负数　C、零　D、符号与a有关

解：根据已知条件，画出函数图像，分析m的取值范围，即可解决问题。$f(x)=x^2+x+a=(x+\frac{1}{2})^2+a-\frac{1}{4}$

对称轴为直线$x=-\frac{1}{2}$，且有$f(m)<0$

所以如下图所示，可得$m\in(-1,0)$

$\therefore m+1\in(0,1)\therefore f(m+1)>0$，故应该选A



评注：借助图像研究函数是一种常用的解题方法，将

几何特征和数量关系紧密结合，是数形结合的特征和方法。引用图形可以避免复杂的推理和计算，能轻易的找到解题途径，简化了解题的过程，节省了解题时间。

3、数形结合解决方程与不等式的问题

利用数形结合解决不等式要先根据已知条件构造出函数图像，借助图形与图形的关系探究函数与函数的关系，从图形中找出解题思路。

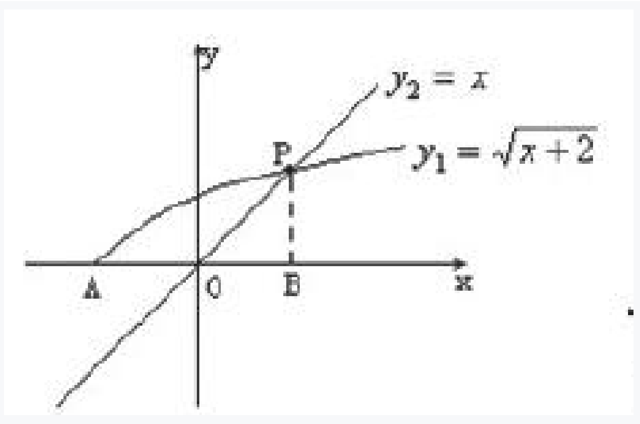
例3、解不等式$\sqrt{x+2}>x$

令$y_1=\sqrt{x+2},y_2=x$，则不等式$\sqrt{x+2}>x$的解，就是使$y_1=\sqrt{x+2}$，的图像

在$y_2=x$的上方的那段对应的横坐标。

如图所示，不等式的解集为$\{x\,|\,x_A\le x\le x_B\}$，而$x_B$可由$\sqrt{x+2}=x$，

解得$x_B=2,x_A=-2$，故不等式的解集为$\{x\,|-2\le x\le 2\}$。



评析：将不等式分解成两个函数，通过函数图像确定两个函数的位置，在作图过程中注意数形转化的等价性，真正的体现数形结合的思想。

4、数形结合解决几何问题

常用数形结合法运用于点、线、面、曲线等性质和相互关系中，会使解题思路明确，容易找到解题的简洁途径，通常根据已知条件先建立函数关系式，然后用代数恒等变换解方程。

例4、已知二次函数$y=x^2-mx+m-2$的图像与x轴交于A、B两点，且$|AB|=\frac{5}{2}$抛物线的顶点为C，求ΔABC的面积。

分析：这里的二次项系数$a=1>0$，可知抛物线开口向上，与x轴交于A、B两点，故得到函数的图像如下。

解：设A、B两点的坐标是$(x_1,0)\,(x_2,0)$，则x_1,x_2是方程$x^2-mx+m-2=0$的两个根，由韦达定理得$x_1+x_2=m,x_1x_2=m-2$

$\because |AB|=|x_1-x_2|=\frac{5}{2}$，又$(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=(x_1-x_2)^2$

$\therefore m^2-4(m-2)=\left(\frac{5}{2}\right)^2$。即$4m^2-16m+7=0$

解得：$m_1=\frac{7}{2},m_2=\frac{1}{2}$

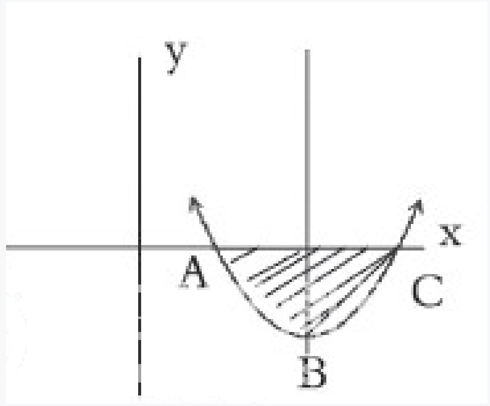
当$m_1=\frac{7}{2}$时，函数的解析式是$y=x^2-\frac{7}{2}x+\frac{3}{2}$

所以，C点的纵坐标是$y_c=\frac{4ac-b^2}{4a}=\frac{4\times1\times\frac{3}{2}-\left(-\frac{7}{2}\right)^2}{4\times1}=-\frac{25}{16}$

$\therefore S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}|Ay|\cdot|y_c|=\frac{1}{2}\times\frac{5}{2}\times\frac{25}{16}=\frac{125}{64}$

当$m_2=\frac{1}{2}$时，同理可得$S_{\Delta ABC}=\frac{125}{64}$

综上：$S_{\Delta ABC}=\frac{125}{64}$



综上，高中数学知识繁杂、变幻莫测，学生要根据学到的知识内容，进行多方面思考，明确问题的目的性。教师在课堂讲授时要注重数形结合的重要性，要熟练运用数形结合的方法解决问题，可以帮助学生提高解题速度和学习成绩。

参考文献

[1]袁桂珍关于数形结合的若干基本观点。桂林广西师范大学学报（自然科学版）1998.09.32.33.

[2]刘焕芬巧用数形结合思想解题数学通的2005年第44卷第一期42 43 44.

[3]潘文芳数形结合，提升素养一例谈数形结合 思想方法的渗透[J]数理化解题研究，2016，（17）.

[4]陈永科浅析数形结合思想方法在高中数学教学中的应用[J].未来英才，2018（3）：10.

[5]姚丽丽浅析数形结合方法在高中数学教学中的实践应用[]新教育时代电子杂志（教师版），2016（46）：235.