

哈恩-巴拿赫(Hahn-Banach)定理的证明

刘晓溪

太原师范学院 030619

[摘要] 本文以“哈恩-巴拿赫(Hahn-Banach)定理”为中心,叙述定理的定义,包括其证明过程以及证明过程中所运用到的基本思想。关于在定理的证明过程中,实的哈恩-巴拿赫(Hahn-Banach)定理,利用超穷归纳法分三部分去说明;复的哈恩-巴拿赫(Hahn-Banach)定理,通过证明实空间上的哈恩-巴拿赫(Hahn-Banach)定理可知,实函数的延拓是一定成立的,那么如果多了虚部是否依旧可以成立是这一部分所要探讨的内容。

[关键词] 哈恩-巴拿赫(Hahn-Banach)定理;线性泛函;超穷归纳法

【DOI】 10.12252/j.issn.2096-6288.2021.12.325

1 实数域上的哈恩-巴拿赫(Hahn-Banach)定理

1.1 实数域上哈恩-巴拿赫(Hahn-Banach)定理的定义

设 X 是实线性空间, $p(x)$ 是 X 上次线性泛函。若 f 是 X 的子空间 Z 上的实线性泛函,且被 $p(x)$ 控制,即满足

$$f(x) \leq p(x), x \in Z$$

则存在 X 上的实线性泛函 \tilde{f} ,使得当 $x \in Z$ 时,有 $\tilde{f}(x) = f(x)$,并且在整个空间 X 上仍被 $p(x)$ 控制,

$$\tilde{f}(x) \leq p(x), x \in X. [2]$$

1.2 定理的证明

证明:(i)先考虑一个点的延拓:

a.若 $Z=X$,则 f 便是在 X 上定义的, f 本身就在全空间上,则延拓一定成立。

b.若 $Z \neq X$,则可以找到 X 上的一点不在 Z 中,将其取作 x_1 ,即任取一点 $x_1 \in X \setminus Z$,那么 x_1 与 Z 张成的线性子空间用 Z_1 来表示,先进行第一步延拓,将原本在 Z 上的有界线性泛函延拓到 Z_1 上,即 $Z_1 = \{x + \lambda x_1 \mid x \in Z, \lambda \in R\}$

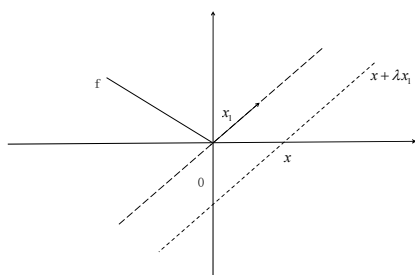
假设 Z 为一维空间,如图所示取一点 x_1 ,形成 \bar{x}_1 ,那么 Z_1 即 x_1 与 Z 张成的子空间就是 x_1 所在直线与 Z 所在直线形成的一维平面,选取 Z 中一点 x_1 ,将所在直线平移即可得到 Z_1 ,平移所得本身应该为无穷多且密集, f 为定义在子空间上的实线性泛函,想要让其延拓到这个子空间 Z_1 上,平面上的有界线性泛函理应也是一个平面,即过这条直线的平面,由此进行延拓。延拓容易做到,还有更加重要的一点就是要保持范数不变,在这里我们所指的 f 是算子范数,直观的理解就是 f 所在直线斜率的绝对值,想要保持算子范数不变则说明平面应在一定的范围之内。

在 Z_1 上定义:

$$f_1(x + \lambda x_1) = f(x) + \lambda \beta, (x \in Z, \lambda \in R) \quad (1.1.1)$$

其中 β 表示一条直线的斜率, β 表示的是这条直线的斜率, β 为适当的实数,满足:

$$\sup_{x \in Z} \{f(x) - \|f\|_Z \|x - x_1\|\} \leq \beta \leq \inf_{x \in Z} \{\|f\|_Z \|x - x_1\| - f(x)\} \quad (1.1.2)$$



不等式的左边, $f(x)$ 在 $x \in Z$ 时其表示为一个数,算子范数同样可看做是一个数(这些数不一定是正数,会存在负数的情况),由此可得,整体便可表示为一个数,则不等式左边所表示的就是在 x 变动时所表示数集的上确界,由此类推,不等式右边表示的即为在 x 变动时所表示数集的下确界。 β 只有满足在集合上确界和下确界范围之间变动,才能达到平衡,保持范数相等。

容易验证, f_1 是 Z_1 上的线性泛函,这样,我们把 f 延拓成 Z_1 上的线性泛函。说到线性,说明其满足可加性和齐次性,即:

$$f_1[(x + \alpha_1 x_1) + (y + \alpha_2 x_1)] = f(x + \alpha_1 x_1) + f(y + \alpha_2 x_1)$$

$$f_1[k(x + \alpha x_1)] = kf(x + \alpha x_1)$$

将其代入定义中便可验证是否成立。线性性是容易验证的。对于(1.1.1)来说, $\alpha = 0$ 时, f 是在 Z 这个定义域上的,显然此时, $f_1(x) = f(x)$,即说明 f_1 是 f 的延拓。

上述思想便是找到一个空间 Z ,由于 Z 并不是全空间,故我们可以找到一点 $x_1 \notin Z$,使 x_1 与 Z 张成一个新的子空间 Z_1 。同理,还可以继续找到另一个点 $x_2, x_2 \notin Z$,使 x_2 与 Z 张成一个新的子空间 Z_2 ,进行再次分析,类似于数学归纳法,但是数学归纳法本身是验证可数或者所谓的自然数上的命题,自然数集上的命题,在泛函分析里称作可数集上的命题。在本证明过程中,子空间 Z_1 与 Z 相差不一定可数,故在这里所使用的数学方法称作超穷归纳法。

式子(1.1.2)本身就是延拓, β 的存在性便说明了式子成立。事实上,对于 $\forall x', x'' \in Z$,

$$f(x') + f(x'') = f(x' + x'') \leq \|f\|_Z \|x' + x''\| \leq \|f\|_Z \|x' - x_1\| + \|f\|_Z \|x_1 + x''\|$$

于是推出:

$$\sup_{x \in Z} \{f(x) - \|f\|_Z \|x - x_1\|\} \leq \inf_{x \in Z} \{\|f\|_Z \|x_1 + x\| - f(x)\},$$

$\forall x', x'' \in Z$ 。即

$$\sup_{x \in Z} \{f(x) - \|f\|_Z \|x - x_1\|\} \leq \inf_{x \in Z} \{\|f\|_Z \|x_1 + x\| - f(x)\}$$

(ii)以下证明这个延拓是保持范数不变的。

明确要证明延拓的同时保持范数不变的性质,因为已知有界线性泛函延拓时范数不发生改变,故等式 $\|f\|_{Z_1} = \|f\|_Z$ 成立。知

$$\|f\|_{Z_1} = \sup_{\|x + \lambda x_1\| = 1} |f_1(x + \lambda x_1)|, x \in Z, \lambda \in R$$

$$\|f\|_Z = \sup_{\|x\| = 1} |f(x)|, x \in Z$$

到此,在 $\beta = 0$ 时,上下两式相等关系,可事实上,可

以在整个实数轴上变动, 即上式的集合要更大, 同时取上确界, 便可得 $\|f\|_{Z_1} \geq \|f\|_Z$, “ \geq ”一定成立。那么接下来我们只需再证明 $\|f\|_{Z_1} \leq \|f\|_Z$ 即可:

$$|f_1(x + \lambda x_1)| = |f(x) + \lambda \beta| \leq \|f\|_Z \|x + \lambda x_1\|, \forall x \in Z, \lambda \in R \quad (1.1.3)$$

即想要证明上式成立只需证明:

$$f(x) + \lambda \beta \leq \|f\|_Z \|x + \lambda x_1\|, \forall x \in Z, \lambda \in R \quad (1.1.4)$$

这是因为在此式中将 x 换为 $-x$, 替换为 $-$ 就可以得到:

$$f(x) + \lambda \beta \geq -\|f\|_Z \|x + \lambda x_1\| \quad (1.1.5)$$

将 (1.1.4) 和由它推出的 (1.1.5) 结合起来便可得到 (1.1.3)。实际上, 由于线性性, 我们只需要证明 (1.1.4), (1.1.5) 其中之一成立即可。

A 当 $\beta = 0$ 时, (1.1.4) 显然成立。

B 当 $\beta > 0$ 时, 令 $x = u$, 根据 β 满足 (1.1.2) 右端不等式, 即由

$$\sup_{x \in Z} [f(x) - \|f\|_Z \|x - x_1\|] \leq \beta \leq \inf_{x \in Z} [\|f\|_Z \|x - x_1\| - f(x)]$$

$$f(x) + \lambda \beta = f(\lambda u) + \lambda \beta = \lambda(f(u) + \beta) \leq \lambda(f(u) + \|f\|_Z \|u + x_1\| - f(u)) = \lambda(\|f\|_Z \|u + x_1\|) = \|f\|_Z \|\lambda u + \lambda x_1\| = \|f\|_Z \|x + \lambda x_1\|$$

C 当 $\beta < 0$ 时, 令 $x = -u$, 根据 β 满足 (1.1.2) 左端不等式, 我们有:

$$f(x) + \lambda \beta = f(-\lambda u) + \lambda \beta = -\lambda(f(u) - \beta) \leq -\lambda(f(u) - (f(u) - \|f\|_Z \|u - x_1\|)) = -\lambda(\|f\|_Z \|u - x_1\|) = \|f\|_Z \|\lambda u + \lambda x_1\| = \|f\|_Z \|x + \lambda x_1\|$$

到此即可说明, 延拓以后的线性泛函保持原来的泛函 $\|f\|_Z$ 不变。

2 复的哈恩-巴拿赫(Hahn-Banach)定理的定义

2.1 复的哈恩-巴拿赫(Hahn-Banach)定理的定义

设 X 是实或复的线性空间, $p(x)$ 是 X 上实线性泛函, $f(x)$ 是定义在 X 的子空间 Z 上的实或复的线性泛函, 且满足

$$|f(x)| \leq p(x), x \in Z$$

则存在 X 上的线性泛函 \tilde{f} , 它是 f 的延拓, 且满足

$$|\tilde{f}(x)| \leq p(x), x \in X. [2]$$

2.2 定理的证明

在复的赋范空间, 令

$$f(x) = \varphi(x) + i\psi(x), (x \in G)$$

接下来讨论齐次性, 假设对于复的赋范空间来说齐次性是成立的, 则会有 $f(ix) = if(x)$ 成立, 此时等式左边为实数, 等式的右边却是复数, 明显可得出等式并不成立。因此齐次性只是在实数域内才成立。可加性在实数域和复数域内均成立。

在复的赋范空间内, $f(x)$ 可以分为两部分, 任何一个复数都可以将其分为实部以及虚部, 函数自然也就可以分为实部函数和虚部函数两部分。根据上述定理的证明已知: 实函数可以延拓到整个空间上。 $\varphi(x)$ 为实函数, 即 $\varphi(x)$ 可以延拓到整个空间上, 记为 $\varphi_0(x)$; 同理, $\psi(x)$ 也为实函数, 便也可以延拓到整个空间上, 记为 $\psi_0(x)$; 那 $f_0(x) = \varphi_0(x) + i\psi_0(x)$ 是否可以作为 $f(x)$ 到全空间上的延拓, 实际上是不可行的。因为这种延拓方式完成后并不能保证线性性, 也就是此证明刚开始

所提到的齐次性因为 i 的存在并不满足。

接下来讨论虚部函数与实部函数的内在关系。上述提到, $f(ix) = if(x)$ 是成立的, 故可得:

$$\varphi(ix) + i\psi(ix) = f(ix) = if(x) = i\varphi(x) - \psi(x)$$

由等式左右两边实部与实部相等, 虚部与虚部相等, 则:

$$\varphi(ix) = -\psi(x), i\psi(ix) = i\varphi(x)$$

$\psi(x)$ 可以由 $\varphi(x)$ 表示, 即虚部函数可以由实部函数进行表示, 根据线性性可知, 复的线性泛函的实部和虚部满足关系:

$$\varphi(ix) = -\psi(x)$$

到此, 只需要延拓实部即可, 虚部函数可由实部函数表示。

实的赋范空间, 一个空间为线性空间, 线性空间对加法运算封闭, 数乘运算封闭, 即:

$$x + y \in Z, \alpha x \in Z$$

若是实的赋范空间, 则数乘的 α 为实数, 即实数的数乘运算是封闭的。若为复的赋范空间, 则 α 为复数, 即复数的数乘运算也是封闭的。

把 X 看作是实的赋范空间, 则由此前进行的讨论所得结果, $\varphi(x)$ 作为实部函数可以保持范数不变地延拓为 X 上的实线性泛函 $\varphi_0(x)$, 则可得到:

$$F(x) = \varphi_0(x) + i[-\varphi_0(ix)] \text{ 即}$$

$$F(x) = \varphi_0(x) - i\varphi_0(ix), x \in X$$

此时可以得到 F 就是满足定理要求的即可以定义在全空间上的线性泛函。既然 F 为 f 的延拓, 则 F 首先应满足的条件为复空间上的线性泛函, 满足齐次性, 对于

$$F[(a + bi)x] = F(ax + ibx) = aF(x) + bF(ix)$$

此式想要满足齐次性, 满足 i 提出式子依然成立即可, 接下来验证 $F(ix) = iF(x)$ 成立:

$$F(ix) = \varphi_0(ix) - i\varphi_0(-x) = \varphi_0(ix) + i\varphi_0(x) = i(\varphi_0(x) - i\varphi_0(ix)) = iF(x)$$

由此便可推出 F 是 X 上的线性泛函, 并且对于 $\forall x \in G$, $F(x) = \varphi_0(x) - i\varphi_0(ix) = \varphi(x) - i\varphi(ix) = f(x)$

所以 F 是 f 的延拓。延拓还需要保持范数不变, 接下来证明范数不变。

复数的三种表示形式, 分别是 $a + bi$, 三角函数, 指数形式的表示, $F(x) = |F(x)|e^{i\theta}$ 那么令 $\theta = \arg F(x)$, $|F(x)|$ 是实数, 此式左边为模也就是实数, 式子要成立, 右边也得为实数, 故其只剩实部虚部为 0。不等式则类似于:

$$|f(x)| = \sqrt{|\varphi(x)|^2 + |\psi(x)|^2} \geq |\varphi(x)|$$

则可得:

$$|F(x)| = e^{-i\theta} F(x) = F(e^{-i\theta} x) = \varphi_0(e^{-i\theta} x) - i\varphi_0(i e^{i\theta} x) = \varphi_0(e^{-i\theta} x) \leq \|\varphi_0\| \|e^{-i\theta} x\| = \|\varphi_0\| \|x\| \leq \|f\| \|x\|$$

分析此式可知 F 在 G 上的范数小于等于 f 在 G 上的范数, 同时 F 又是 f 的延拓, 便可推出延拓时保持了范数不变。即由于 $\|F\| \leq \|f\|_G$, 延拓可得 $\|F\| \geq \|f\|_G$, 从而可得 $\|F\| = \|f\|_G$, 由此可得 F 就是 f 在全空间上的保持范数不发生改变延拓。

至此, 发现在定理的证明过程中并没有运用到范数的

五、教学反思

高中阶段的数学素养是指学生进行数学知识的学习, 数学方法的积累、数学思维的运用, 并以此为基础进行在现实情境中通过数学角度去思考问题、分析问题和解决问题, 进而形成良好的数学能力、品质和习惯。

落实核心素养的数学教学就是要充分挖掘和利用数学课程内容所蕴含的育人资源, 发挥数学在形成人的理性思维、科学精神和促进人的智力发展中的独特作用, 用数学的方式开展育人活动, 使学生在掌握“四基”、提高“四能”的过程中, 发展数学核心素养, 学会有逻辑地、创造性地思考, 形成数学的思维方式, 发展理性思维, 养成科学精神, 成为善于认识问题、解决问题的人才。

为体现高考在这部分知识命题的特点, 本节课习题的选择以综合性为原则, 围绕两个定理, 以不同情境设计题组, 师生共同解决问题, 训练学生在原有知识的认知水平上, 能够熟练地提取解决问题的相关信息, 在解决问题的过程中训练分析问题、解决问题的能力。启发学生用数学的方式开展学习活动, 逐渐形成数学的思维方式, 并努力将这种思维方式转化为准确判断事物的行为, 养成用数学的眼光观察, 用数学的思维, 思维思考和用数学语言表达的习惯。

对于例题的讲解采用“问题串”的形式层层设疑, 让学生在问题情境中经历思维受阻的过程, 再引导学生找问题的切入点, 从而选择恰当的解决问题的方案, 激发学生的创造性思维, 渗透思考问题的方式、方法。采用情境—问题—活动—结果的路径, 真正教会学生学会数学知识, 学会数学思维, 真正落实核心素养的数学教学。

双新背景下高三复习课的教学, 教师不但要帮助学生对学生学过的知识进行加工、整合, 而且要结合新课标, 认真研读2019年版新教材, 分析全国卷与全国新高考试卷, 把握新高考命题趋势。同时领会新教材编写意图, 结合高考题和新教材, 精选例题, 渗透数学核心素养, 增强复习课的实效性, 构建高三复习金课。

参考文献

- [1] 范世祥. 高三复习课的教学设计与备课历程[J]. 中学数学教学, 2018(6): 59-62
- [2] 李君梅, 黄严生. 高三数学一轮复习课怎么上才有效[J]. 中学数学教学参考(上旬), 2020(1/2): 93-95
- [3] 李瑞杰. 一节高三复习课的设计与反思[J]. 中学数学教学参考(上旬), 2020(1/11): 44-45
- [4] 《普通高中数学课程标准(2017)》

(上接第664页)

$\|x\|=0 \Rightarrow x=0$ 此条性质, 那么也就意味着在定理中的假设范数的条件实际上可以改为半范数 $p(x)$ 。线性空间中完全可以给出哈恩-巴拿赫(Hahn-Banach)定理, 而且线性泛函的延拓也并不是唯一的。

参考文献

- [1] Constantin P. Niculescu; Octav Olteanu. (2020). From the Hahn-Banach extension theorem to the isotonicity of convex functions and the majorization theory[J]. Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Fisicasy Naturales, Serie A, M.
- [2] 程其襄. 实变函数与泛函分析与基础[M]. 北京高等教育出版社. 2019.

[3] Karlsson Anders. (2021). Hahn-Banach for metric functionals and horo functions[J]. Journal of Functional Analysis.

[4] 李威, 杨显. Hahn-Banach定理的形成[J]. 西北大学学报(自然科学版). 2013.

[5] 孙炯, 贺飞, 王万义. 泛函分析(第二版)[M]. 高等教育出版社. 2018.

[6] 张恭庆, 林源渠. 泛函分析讲义[M]. 北京: 北京大学出版社. 2011.

作者简介: 刘晓溪(2000-), 性别: 女, 籍贯: 共青团员, 学历: 本科, 研究方向: 泛函分析。