渗透核心素养，构建高三复习金课

——以正、余弦定理的高三复习课为例

王利红

河北省峰峰矿区教师进修学校　056200

[摘　要]双新背景下高三复习课的教学，教师不但要帮助学生对学过的知识进行加工、整合，而且要结合新课标，认真研读2019年版新教材，分析全国卷与全国新高考试卷，把握新高考命题趋势.领会新教材编写意图，结合高考题和新教材，精选例题，真正渗透数学核心素养，增强复习课的实效性，构建高三复习金课。

[关键词]核心素养；复习教学；知识交汇；精选例题

【DOI】10.12252/j.issn.2096-6288.2021.12.339

一、背景分析

《普通高中数学课程标准（2017）》的颁发，标志着新一轮课程改革的启动。数学教学将面临几点重大变化：知识目标到素养目标转型；客观主义到建构主义位移；浅层学习到深度学习过渡；知识评价到能力评价变革。对数学教学提出了新要求：高中数学教学以发展学生核心素养为导向，创设合适的教学情境，引导学生把握数学内容的本质。提倡独立思考、自主学习、合作交流等多种学习方式，激发学生学习数学的兴趣，养成良好的学习习惯，促进学生实践能力和创新能力的发展。注重信息技术与数学课程的深度融合，提高数学教学的实效性。不断引导学生感悟数学的科学价值、应用价值、文化价值和审美价值。

面临新课程改革及新教材的推广使用和新的高考改革，知识应当采用什么方式引入？例题的数量、难度、呈现方式如何确定？习题如何设计？下面一正、余弦定理的高三复习课的例题的选取、讲解为例，谈谈自己的一些做法和看法。

二、学情分析

三角形是平面几何中最常见、最重要的图形之一，三角形中的边角关系是三角形中最重要的关系，而正、余弦定理是刻画三角形边角关系最为重要的两个定理，是高考考查的重点内容之一，是解三角形的依据，可以依托平面图形、立体图形的展开图进行考查，在实际应中多用于方位、测量等问题。新教材为体现向量的整体性和工具性作用，不再对本内容单独设立章节，但在教材内容的设置和高考考查的力度上并未减弱，在教材内容和作业设计上增加了实际应用问题的比重。

学生通过高一、二年级的学习，仅停留在能够熟记正、余弦定理的内容的阶段，还不能熟练应用两个定理解决问题，尤其对于两个定理的选择和实际应用，学生做题时往往表现为“会而不全，全而不对”的现象。常见的错误有：对于开放性试题条件的选择矛盾化、对于边角互化时纠结两个定理的选择；对于平面多边形（如四边形）如何选择一个恰当三角形为媒介建立边角关系；与不等式交汇命题时忽略边角的隐含条件；实际应用中对三角形模型的建立以及因对专业名词如：方位角、仰角、俯角的理解不透彻从而不会应用。

高考对此内容的考查大多以中低档题型出现，因此要求学生在高考中能得满分。

三、教学目标

一堂课不是单一地培养学生的一种能力，而应当以培养多种能力为目标，因此本节课的教学目标为：

知识目标

（一）通过例题训练，引导学生利用正、余弦定理在解决实际问题过程中建立解三角形的数学模型；

（二）通过正、余弦定理与其它知识交汇习题训练，开阔学生视野，激发学生的学习兴趣；

（三）通过开放性问题的训练，提升学生批判性思维，培养学生的多角度思维能力。

素养目标

（一）依托立体展开图中正、余弦定理的应用培养学生直观想象数学核心素养；

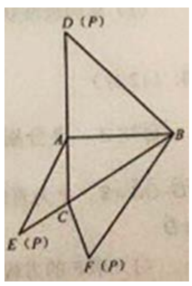
（二）通过测量问题建构三角形边角关系培养学生数学建模核心素养；

（三）通过例题讲解和两个定理的综合运用，培养学生数学抽象、逻辑推理以及数学运算的核心素养。

（四）通过不同背景下的正余弦定理的应用，体现在知识交汇点处命题，建构知识网络，体现知识的整体性原则，渗透数学学科本质。

四、教学过程

例1　如图，在三棱锥P－ABC的平面展开图中，AC＝1，AB＝AD＝$\sqrt{3}$，AB⊥AC，AB⊥AD，∠CAE＝30°，则cos∠FCB＝_________。



问题1：观察已知图形，所求∠FCB所在的△FCB中有几组已知的边角关系的信息？如果没有，怎样发现？（引导学生基于三棱锥的展开图，还原三棱锥，从图中找出重合的线段，确定所要研究的三角形中的已知条件。）

设计意图：本题选用2020年全国卷Ⅰ第16题，它打破常规的解三角形问题，与立体几何交汇，将三棱锥展开，根据展开图中多个三角形中已知条件，还原三棱锥，找出重合的线段。既考查了学生空间想象能力又考查利用正余弦定理解斜三角形，在知识交汇点命题，考查直观想象、数学运算等核心素养。

问题2：请你找出突破问题的关键条件，确定解题步骤。

所谓关键的条件就是线段CF与BF，还原三棱锥，CF与CE重合，BF与BD重合。从而在三条边长都知道的情况下利用余弦定理求角。

师生活动∵AB⊥AC，AB=$\sqrt{3}$，AC=1，由勾股定理得$BC=\sqrt{AB^2+AC^2}=2$，同理得BD=$\sqrt{6}$，∴BF=BD=$\sqrt{6}$

在ΔACE中，AC=1，AE=AD=$\sqrt{3}$，∠CAE=30°，由余弦定理得

$$CE^2=AC^2+AE^2-2ACAE\cos 30°=1+3-2\times 1\times\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=1$$

∴CF=CE=1，在ΔBCF中，BC=2，BF=$\sqrt{6}$，CF=1，由余弦定理得

$$\cos\angle FCB=\frac{CF^2+BC^2-BF^2}{2CF\cdot BC}=-\frac{1}{4}$$

正余弦定理的虽然是解三角形的依据，但它可以依托任何平面图形或立体图形的展开图进行考查，出题之灵活就体现在只要图形中有三角形的存在便可运用。

例2 为了测量某新建的信号发射塔AB的高度，先取与发射塔底部B在同一平面内的两个观测点C、D，测得$\angle BDC=30^{\circ},\angle BCD=75^{\circ},CD=40m$，并在点C的正上方E出观测发射塔顶部A的仰角为30°，且CE=1m，则发射塔高AB为____

设计意图：本题源于（人教A版2019）《普通高中数学教科书-数学》（必修二）习题6.4（复习巩固）第8题，将解三角形应用于实际问题，体现“数学源于实践又用于实践”的数学应用性新教材编写理念，也将是未来高考命题趋势。

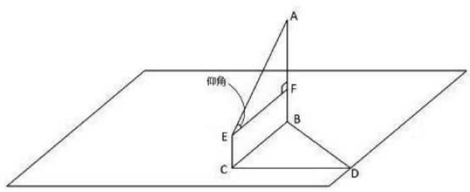
问题1：本题没有已知图形，请你根据题意画出该实际问题的数学示意图？

设计意图：引导学生作出该实际问题的数学示意图，也是数学建模的初步体验。通过作图培养学生无图想图，无图画图的直观想象能力。

问题2：什么是仰角？点E处的仰角怎么作？它对于求塔高会带来什么有利因素？

设计意图：作出点E处的仰角是解决该题的关键，而对于仰角的理解学生容易忽略知识点，由此引发学生重视数学的实际应用，培养数学建模的核心素养。

师生活动：如图，过点E作EF⊥AB，垂足为F，则EF=BC=1，$\angle AEF=30°$。在△BCD中，由正弦定理得



$$BD=\frac{CD\cdot\sin\angle BDC}{\sin\angle CBD}=\frac{40\cdot\sin 60°}{\sin 45°}=20\sqrt{6}$$

所以$EF=20\sqrt{6}$，在Rt△AEF中，

$$AE=EF\cdot\tan\angle AEF=20\sqrt{6}\times\frac{\sqrt{3}}{3}=20\sqrt{2}$$

所以$AB=AE+BF=(20\sqrt{2}+1)m$

本例题的选择是基于新教材注重了数学知识的实用性，从情境引入，到知识形成，直至用于实际问题的解决。新教材从例题的选择到作业题的设计都加大了应用题的比重，教师应加以重视，也将是未来高考的命题方向。

例3 已知a，b，c分别为△ABC内角A，B，C的对边，若△ABC同时满足以下四个条件中的三个：

①$\frac{b-a}{c}=\frac{2\sqrt{6}a+3c}{3(a+b)}$；②$\frac{\cos C}{\cos A}+\frac{c}{a}=\frac{2b}{a}$；

③$a=\sqrt{6}$；④$b=2\sqrt{2}$.

（1）条件①②能否同时满足，请说明理由；

（2）以上四个条件，请在满足三角形有解的所有组合中任选一组，并求出对应ΔABC的面积.

设计意图：设计开放性问题，体现新高考改革，通过设计的问题，提升学生已有的认知，激发学生强烈的认知冲突，激起学生内部的学习动力。让学生在掌握知识技能的同时，感悟数学的思想，积累解题经验。

师生活动：（1）由①$\frac{b-a}{c}=\frac{2\sqrt{6}a+3c}{3(a+b)}$及余弦定理，得

$3\left(a^2+c^2-b^2\right)=-2\sqrt{6}ac.$

所以$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=-\frac{\sqrt{6}}{3}$.

由②$\frac{\cos C}{\cos A}+\frac{c}{a}=\frac{2b}{a}$及正弦定理，

得$\frac{\cos C\sin A+\cos A\sin C}{\cos A\sin A}=\frac{2\sin B}{\sin A}$，

即$\frac{\sin(A+C)}{\cos A\sin A}=\frac{2\sin B}{\sin A}.\because A+C=\pi-B,A,B\in(0,\pi)$，

$\therefore\sin(A+C)=\sin B\neq 0,\sin A\neq 0$，

$\therefore\cos A=\frac{1}{2},\because A\in(0,\pi),\therefore A=\frac{\pi}{3}$.

$\because\cos B=-\frac{\sqrt{6}}{3}<-\frac{1}{2}$且$B\in(0,\pi)$，

$\therefore B>\frac{2\pi}{3}.\therefore A+B>\pi$.矛盾，$\therefore\Delta ABC$不能同时满足①②.

(2)由(1)知，ΔABC满足①③④或②③④.

若ΔABC满足①③④，

$\because b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，

$\therefore 8=6+c^2+2\times\sqrt{6}\times c\times\frac{\sqrt{6}}{3}$，即$c^2+4c-2=0$，

解得$c=\sqrt{6}-2$或$c=-\sqrt{6}-2$(舍去).

又$\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

$\therefore\Delta ABC$的面积$S=\frac{1}{2}ac\sin B=\sqrt{3}-\sqrt{2}$.

若ΔABC满足②③④.

$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，即$\frac{\sqrt{6}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{\sin B}$，则$\sin B=1,\therefore B=\frac{\pi}{2}$，

$\therefore c=\sqrt{b^2-a^2}=\sqrt{8-6}=\sqrt{2}$，

$\therefore\Delta ABC$的面积$S=\frac{1}{2}ac=\frac{1}{2}\times\sqrt{6}\times\sqrt{2}=\sqrt{3}.$

五、教学反思

高中阶段的数学素养是指学生进行数学知识的学习，数学方法的积累、数学思维的运用，并以此为基础进行在现实情境中通过数学角度去思考问题、分析问题和解决问题，进而形成良好的数学能力、品质和习惯。

落实核心素养的数学教学就是要充分挖掘和利用数学课程内容所蕴含的育人资源，发挥数学在形成人的理性思维、科学精神和促进人的智力发展中的独特作用，用数学的方式开展育人活动，使学生在掌握“四基”、提高“四能”的过程中，发展数学核心素养，学会有逻辑地、创造性地思考，形成数学的思维方式，发展理性思维，养成科学精神，成为善于认识问题、解决问题的人才。

为体现高考在这部分知识命题的特点，本节课习题的选择以综合性为原则，围绕两个定理，以不同情境设计题组，师生共同解决问题，训练学生在原有知识的认知水平上，能够熟练地提取解决问题的相关信息，在解决问题的过程中训练分析问题、解决问题的能力。启发学生用数学的方式开展学习活动，逐渐形成数学的思维方式，并努力将这种思维方式转化为准确判断事物的行为，养成用数学的眼光观察，用数学的思维，思维思考和用数学语言表达的习惯。

对于例题的讲解采用“问题串”的形式层层设疑，让学生在问题情境中经历思维受阻的过程，再引导学生找问题的切入点，从而选择恰当的解决问题的方案，激发学生的创造性思维，渗透思考问题的方式、方法。采用情境--问题--活动--结果的路径，真正教学会学生学会数学知识，学会数学思维，真正落实核心素养的数学教学。

双新背景下高三复习课的教学，教师不但要帮助学生对学过的知识进行加工、整合，而且要结合新课标，认真研读2019年版新教材，分析全国卷与全国新高考试卷，把握新高考命题趋势.同时领会新教材编写意图，结合高考题和新教材，精选例题，渗透数学核心素养，增强复习课的实效性，构建高三复习金课。

参考文献

[1]范世祥.高三复习课的教学设计与备课历程[J].中学数学教学，2018（6）：59-62

[2]李君梅，黄严生.高三数学一轮复习课怎么上才有效[J].中学数学教学参考（上旬），2020（1/2）：93-95

[3]李瑞杰.一节高三复习课的设计与反思[J].中学数学教学参考（上旬），2020（1/11）：44-45

[4]《普通高中数学课程标准（2017）》

（上接第664页）

$\|x\|=0 \Rightarrow x=0$ 此条性质，那么也就意味着在定理中的假设范数的条件实际上可以改为半范数$p(x)$。线性空间中完全可以给出哈恩-巴拿赫(Hahn-Banach)定理，而且线性泛函的延拓也并不是唯一的。

参考文献

[1]Constantin P. Niculescu;Octav Olteanu.(2020).From the Hahn-Banach extension theorem to the isotonicity of convex functions and the majorization theory[J].Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas,Fisicasy Naturales,Serie A,M.

[2]程其襄.实变函数与泛函分析与基础[M].北京高等教育出版社.2019.

[3]Karlsson Anders.(2021).Hahn-Banach for metric functionals and horo functions[J].Journal of Functional Analysis.

[4]李威，杨显.Hahn-Banach定理的形成[J].西北大学学报(自然科学版).2013.

[5]孙炯，贺飞，王万义.泛函分析(第二版)[M].高等教育出版社.2018.

[6]张恭庆，林源渠.泛函分析讲义[M].北京：北京大学出版社.2011.

作者简介：刘晓溪（2000-），性别：女，籍贯：共青团员，学历：本科，研究方向：泛函分析。