一道高考数列题的启示

苟仕洪

云南省绥江第一中学

摘　要：高中数学进行了对新课程标准到新教材2019A版的改编，其中数列知识是高中数学高考的必考内容，数列高考题究竟怎么考，它与平时教师要求学生在解题中注重一题多解、举一反三是分不开的，特别是已知数列的关系式 $a_{n+1}=Aa_n+B$，求通项公式。在教学中培养学生观察、分析能力以及熟练的解题能力，将是教师在教学中担任的重要任务。

关键词：高考题；一题多解；举一反三；教材练习；习题

【DOI】10.12252/j.issn.2096-6288.2022.01.064

以高考题为例：新课标2020年高考全国卷3（理科）第17题：

设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=3$，且 $a_{n+1}=3a_n-4n$.

（1）计算 a_2，a_3 猜想 $\{a_n\}$ 的通项公式并加以证明；

（2）求数列 $\{2^n\cdot a_n\}$ 的前n项的和 s_n。

分析：从已知条件来看，给出的是数列的递推公式，有递推公式可以猜想数列的前几项，但要直接求出通项公式，课本中没有其他的方法，只有利用先求出 a_2、a_3，猜出 a_n，最后用数学归纳法加以证明。

（1）解：由 $a_{n+1}=3a_n-4n$ 且 $a_1=3$，得 $a_2=5$，$a_3=7$

故猜想得：$a_n=3+(n-1)\times 2=2n+1$

证明：(1)当 $n=1$ 时，$a_1=2\times 1+1=3$.(2)假设 $n=k$ 时，猜想成立，得 $a_k=2k+1$，

那么 $n=k+1$ 时

$$a_{k+1}=3a_k-4k=3(2k+1)-4k=6k-4k+3$$
$$=2k+3=2(k+1)+1$$

由（1）、（2）知，当 $n\in N^*$ 时，$a_n=2n+1$ 成立

第二小题求解略。

另法：由 $a_1=3$，$a_{n+1}=3a_n-4n$ 这样的递推公式，也可以求出其通项公式，此结构可以写成：

$a_{n+1}+A(n+1)+B=3(a_n+An+B)$，$a_{n+1}=3a_n+3An+3B-An-A-B$

$a_{n+1}=3a_n+2An+2B-A$

结合已知条件得 $2A=-4\Rightarrow A=-2$

所以：$a_{n+1}-2(n+1)-1=3(a_n-2n-1)$，$a_n-2n-1=(a_1-2\times 1-1)\times 3^{n-1}$

$a_n=2n+1$

这道高考题给了我们一个启示：要重视教材。通过对高考题的研究，抓住数列的基本概念、基本计算、基本解题方法，尽量做到一题多解、举一反三。

一、一题多解

此类题型的一题多解也在教材中的练习、习题出现。

例1：新教材选择性必修第二册第41页第7题：已知数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1=1$，且满足 $a_{n+1}+a_n=3\times 2^n$.

（1）求证：$\{a_n-2^n\}$ 是等比数列.

（2）求数列 $\{a_n\}$ 的前n项和 s_n.

分析：如用猜想 $a_2=5=4+1,a_3=7=8-1,a_4=17=16+1,$

猜想 $a_n=2^n+(-1)^n$.

方法一：用数学归纳法加以证明：

当 $n=1$ 时，$a_1=2+(-1)^1=1$ 成立

假设 $n=k$ 成立，则 $a_k=2^k+(-1)^k$，那么 $n=k+1$ 时，$a_{k+1}=-a_k+3\cdot 2^k=2^{k+1}+(-1)^{k+1}$ 成立，故 $n\in N^*$，式子成立。则 $a_n-2^n=(-1)^n$

方法二：证明：设 $c_n=a_n-2^n$，要证明 $\{c_n\}$ 为等比数列，由等比数列的定义：

$$\frac{c_{n+1}}{c_n}=q(q\neq 0)\text{常数}.\ \frac{c_{n+1}}{c_n}=\frac{a_{n+1}-2^{n+1}}{a_n-2^n}=\frac{3\times 2^n-a_n-2^{n+1}}{a_n-2^n}=\frac{2^n-a_n}{a_n-2^n}=-1$$

$\therefore$ 数列 $\{c_n\}$ 以首项为-1，公比为-1的等比数列，即 $\{a_n-2^n\}$ 数列为等比数列.

则

$$a_n-2^n=(a_1-2^1)\cdot(-1)^{n-1}，\quad a_n=(-1)^n+2^n$$

方法三：

把 $a_{n+1}+a_n=3\times 2^n$ 两边同除以 2^{n+1}，得：

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{a_n}{2^n}=\frac{3}{2}\therefore\frac{a_n}{2^n}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{a_n}{2^n}+\frac{3}{2}$$

设 $b_n=\frac{a_n}{2^n}$，则化为 $b_{n+1}=-\frac{1}{2}\cdot b_n+\frac{3}{2}$ 这符合

$a_{n+1}=Aa_n+B$ 型，就可以求出通项公式了。

（2）解：$s_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$

$$\begin{aligned}s_n&=(-1)^1+2^1+(-1)^2+2^2+(-1)^3+2^3+\cdots+(-1)^n+2^n\\&=\left[(-1)^1+(-1)^2+(-1)^3+\cdots+(-1)^n\right]+\left(2^1+2^2+2^3+\cdots+2^n\right)\\&=\frac{(-1)\times\left[1-(-1)^n\right]}{2}+\frac{2\left(1-2^n\right)}{-1}\\&=\frac{(-1)^n}{2}+2^{n+1}-\frac{5}{2}\end{aligned}$$

例2：新教材选择性必修第二册第41页第11题：

已知数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1=\frac{3}{5}$，且满足 $a_{n+1}=\frac{3a_n}{2a_n+1}$.

（1）求证：数列 $\left\{\frac{1}{a_n}-1\right\}$ 为等比数列.

（2）若 $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots+\frac{1}{a_n}<100$，求满足条件的最大整数n.

分析：此题可以一题多解

方法一：先算出 $a_2=\frac{9}{11},a_3=\frac{9}{11},a_4=\frac{9}{11}$.猜想出 $a_n=\frac{3^n}{3^n+2}$.然后用数学归纳法加以证明即可。

方法二：证明：设 $c_n=\frac{1}{a_n}-1$，要证明 $\{c_n\}$ 为等比数列即可。

$$\frac{c_{n+1}}{c_n}=\frac{\frac{1}{a_{n+1}}-1}{\frac{1}{a_n}-1}=\frac{1-a_{n+1}}{1-a_n}\cdot\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{1-\frac{3a_n}{2a_n+1}}{1-a_n}\cdot\frac{a_n}{\frac{3a_n}{2a_n+1}}=\frac{2a_n+1-3a_n}{(2a_n+1)\cdot(1-a_n)}\cdot\frac{2a_n+1}{3}=\frac{1}{3}$$

$\therefore$ 数列 $\{c_n\}$ 是以首项为 $\frac{2}{3}$，公比为 $\frac{1}{3}$ 等比数列，

即数列 $\left\{\frac{1}{a_n}-1\right\}$ 为等比数列。

则：$\frac{1}{a_n}-1=\left(\frac{1}{a_1}-1\right)\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$，$\frac{1}{a_n}=\frac{2}{3^n}+1$，$\therefore a_n=\frac{3^n}{3^n+2}$

方法三：.分析：去分母得 $a_{n+1}\cdot 2a_n+a_{n+1}=3a_n$，

$3\cdot\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{1}{a_{n+1}}+2$，$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{a_n}+\frac{2}{3}$

设 $c_n=\frac{1}{a_n}$，这符合 $a_{n+1}=Aa_n+B$ 型，就可以求出通项公式了。

第（2）的解答略。

例 3：新教材选择性必修第二册第4页练习的第3题：已知数列 $\{a_n\}$ 的前项的和 s_n，若 $s_n=2a_n+1$，求　。

方法一：分析：教材参考书是这样解答的：由 $s_n=2a_n+1$，得 $s_{n+1}=2(s_{n+1}-s_n)+1$，即 $s_{n+1}-1=2(s_n-1)$，又 $s_1=-1$，故 $s_1-1=-2$，所以数列 $\{s_n-1\}$ 是以−2为首项，2为公比的等比数列，于是 $s_n-1=-2^n$，所以 $s_n=-2^n+1$.通过解答不难发现大部分学生是无法想到的。

从学生的实际出发，由 $s_n=2a_n+1$，得 $s_{n+1}=2(s_{n+1}-s_n)+1$，$s_{n+1}=2s_{n+1}-2s_n+1$，$s_{n+1}=2s_n-1$

符合 $a_{n+1}=Aa_n+B$ 型 $\therefore s_{n+1}+t=2(s_n+t)$，结合 $a_{n+1}=Aa_n+B$，得 $t=-1$

$\therefore s_{n+1}-1=2(s_n-1)$

所以数列 $\{s_n-1\}$ 是以−2为首项，2为公比的等比数列.

方法二：

$s_{n+1}=2a_n+1,(n\geq 1)$　　①

$s_{n-1}=2a_{n-1}+1,(n\geq 2)$　　②

①−②得：$a_n=2a_n-2a_{n-1}$

$\frac{a_n}{a_{n-1}}=2,(n\geq 2)$

所以数列 $\{a_n\}$ 是以−1为首项，2为公比的等比数列

$a_n=-2^{n-1}$ 带入 $s_n=2a_n+1$ 中，

得 $s_n=-2^n+1$.

二、举一反三

如已知递推公式 $a_{n+1}=Aa_n+B$ 型，求通项公式，是平时练习时的常见题型

例1：已知 $a_1=2$，求 $a_{n+1}=3a_n+2^n$ 求 a_n。

分析：两边同时除以 2^{n+1}，得到 $\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}=3\cdot\frac{a_n}{2^{n+1}}+1$,

得 $\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}=\frac{3}{2}\cdot\frac{a_n}{2^n}+1$

设 $c_n=\frac{a_n}{2^n}$，则 $c_{n+1}=\frac{3}{2}\cdot c_n+1$，可以构造等比数列 $c_{n+1}+2=\frac{3}{2}(c_n+2)$。

$\therefore c_n+2=(c_1+2)\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$，$c_n=3\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$，$a_n=3\cdot 2^n\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$。

例2：已知函数 $f(x)=\frac{x}{mx+n}(m,n\text{为常数},\ m\neq 0)$,满足

$f(x)=x$有两个相同的根且$f(2)=1$.

（1）求$f(x)$的解析式；

（2）设数列$\{x_n\}$满足$3x_{n+1}=f(x_n)$，且$x_1=\frac{1}{2}$，求x_n.

（1）解：$\begin{cases}2m+n=2\\ mx^2+nx=x\end{cases}\Rightarrow m=\frac{1}{2},n=1,$

$\therefore f(x)=\frac{2x}{2+x}$

（2）解：由$3x_{n+1}=f(x_n)$，得$3x_{n+1}=\frac{2x_n}{2+x_n}$

$2x_n-3x_{n+1}=3x_{n+1}\cdot x_n$

$\frac{1}{x_{n+1}}=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x_n}+\frac{3}{2}$※

符合$a_{n+1}=Aa_n+B$型，构造等比数列：

$\frac{1}{x_{n+1}}+t=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{x_n}+t\right)$，展开结合※得$t=3$

则数列$\left\{\frac{1}{x_n}+3\right\}$是以首项为5，公比为$\frac{3}{2}$的等比数列

所以：$\frac{1}{x_n}+3=5\times\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$

即 $x_n=\frac{1}{5\times\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}-3}$

从新课标高考考查数列知识来看，着重考查等差、等比数列，以及非等差、等比数列的基础知识，基本的解题能力。但在新教材2019年A版中数列部分的练习题、习题比原版教材要更难、更灵活。这就如教参中要求教师要让学生深入具体概念和原理的生成情境中，充分体验分析、归纳、概括、数学表达、辨析等过程，在过程中建立对概念和原理的清晰、准确的认识。在教学中做到一题多解、举一反三，这样学生学习数列部分就一定能学好。

参考文献

[1]李佳怡.数列通项公式求法探究[J].科技风，2016（20）：23.

[2]雷自学.递推数列通项公式的求法[J].中学课程辅导（教学研究），2018，12（29）：194-195.

[3]王俊义.数列通项公式的几种求法[J].中学生数理化（高二高三版），2019（1）：21-22.