整数对称性
——哥德巴赫猜想的初等证明

陈荣如
江西省樟树市林业局

摘　要：文章主要讨论了整数及同类整数的对称性，最小非负剩余类的组合。提出了对称点整数及同类对称点整数的对称互素数的筛法。通过同类对称的性质，证明了大于3的整数两边都有对称素数。

关键词：整数对称；同类对称；对称筛法；对称素数
【DOI】10.12252/j.issn.2096-6288.2022.02.237

一、整数的对称

定义：若整数S±d = a，b，则称整数a，b以S为对称点互相对称。S为对称点，d为对称距，a，b为对称数。

（一）剩余类的加、减法则：

以素数P_i为模的两个剩余类相加，其和若大于或等于P_i时，应减去一个P_i。当两个剩余类相减，其差为负数时，则应加上一个P_i，成为最小非负剩余。

性质1：两对称数之和为对称点整数的2倍。

证：设　S±d = a，b　即有 a+b=（S - d）+（S+d）= 2S。 证毕。

性质2：在整数1，2，…，S，…，2S-1中，以S为对称点，以素数2为模的剩余{0}互对的数仍是{0}；{1}互对的仍是{1}。

证：反证法。若不然有R_0，R_1以对称点S互相对称，根据性质2，则有：$R_0+R_1=2S$

因为R_0是偶数，R_1是奇数，偶数加奇数之和是奇数，而2S是偶数。所以R_0与R_1不可能互对。证毕。

性质3：以素数P_m为模的剩余{ i }($0\leq i<P_m$)的整数中一个数为对称点，那么{ i }对称的数仍是{ i }的数。

证：设{ i }类的数为{kP_m+i}(k=0，1，2，…；$0\leq i<P_m$)，以其中nP_m+i为对称点，则有$2(nP_m+i)-(kP_m+i)=P_m(2n-k)+i$

因为 $P_m(2n-k)+i$仍是{kP_m+i}中的数。所以{ i }互对的数仍是{ i }。证毕。

性质4：以素数$P_m(>P_1)$为模的剩余{ i }以外的整数为对称点，那么剩余{ i }互对的数是以素数P_m为模的另一剩余类的整数。

证：设{ i }的整数为{kP_m+i}(k=0，1，2，…；$0\leq i<P_m$)，对称点为kP_m+r($0<r<P_m$)，即有 $2(kP_m+r)-(kP_m+i)=kP_m+2r-i$，2r-i可记为$P_m+t$，∴ $kP_m+P_m+t=P_m(k+1)+t$。$P_m(k+1)+t$也是素数P_m为模的一个剩余类。证毕。

性质5：以素数2为模的剩余组中，同类的差、和都为零。

证：设　R_0，R_1为素数2的剩余组，即有：$R_0-R_0=R_0$，$R_1-R_1=R_0$，$R_0+R_0=2R_0$；$R_1+R_1=2R_1$；$2R_0$，$2R_1$都是{R_0}中的数。 证毕。

性质6：以素数P_m（＞2）为模的最小非负完全剩余组中，二个非零同余类之和不为零。

证：设 同类为R_i($0<i<P_m$)，即有$R_i+R_i=2R_i$，因为素数模$P_m>2$是奇数，而$2R_i$是偶数，所以，二个非零同类之和不为零。证毕。

性质7：以素数P_m为模的最小非负完全剩余组中，R_0与其它任意一个剩余R_i的和，差都不为零。

证：设 剩余类为R_i（$0<i<P_m$），即有$R_0+R_i=R_i$，$R_0-R_i=P_m-R_i$，因为$i<P_m$，所以P_m-R_i不可能是零。证毕。

二、对称互素数的筛法

为了求得大于3的对称点整数S两边以$P_1P_2\cdots P_m$互素的对称数，我们引进一个新概念“剩余对称式”。

（一）剩余对称式

根据对称点整数S以P_1，P_2，…，P_m（$P_m<\sqrt{2S}<P_m+1$）分别为模的最小非负剩余类为对称点，依次列出一组完全剩余组[1]在两边的对称式。用符号“⇔”表示互相对称。

性质8：根据对称点整数S的剩余对称式，筛去整数数列1，2，…，S，…，$P_1P_2\cdots P_m$中的$P_1\backsim 0$，$P_2\backsim 0$，…，$P_m\backsim 0$及它们对称的剩余类的整数，那么剩下的数都以$P_1P_2\cdots P_m$互素且以S及$S+P_1P_2\cdots P_m/2$为对称点两两对称。

证：设 对称点整数为S（$P_m<\sqrt{2S}<P_m+1$）。那么整数数列1，2，…，S，…，2S-1，2S，…，$S+P_1P_2\cdots P_m/2$，…，$P_1P_2\cdots P_m$中的数都以对称点S 及$S+P_1P_2\cdots P_m/2$两两对称。根据整数的对称性质，按照S的剩余对称式，将$P_1\backsim 0$，$P_2\backsim 0$，…，$P_m\backsim 0$及它们对称的剩余类的整数筛去，筛去的数都是以S及$S+P_1P_2\cdots P_m/2$为对称点两两对称的数，所以剩下的数仍是以S及$S+P_1P_2\cdots P_m/2$为对

称点而对称且以$P_1P_2\cdots P_m$互素的数。　证毕。

根据对称互素数的筛法及欧拉函数[2]，我们可以得到公式1

$$\varphi(S)=a\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\prod^{S,P\backsim 0}\left(1-\frac{1}{p}\right)\prod^{s,p\backsim i}\left(1-\frac{2}{p}\right)$$

其中φ（S）表示以整数S为对称点且以a互素的对称数个数；a表示$P_1P_2\cdots P_m$；S，P_m∽i表示对称点整数S以P为模的剩余类i；0＜i＜p；（$P_m<\sqrt{2S}<P_{m+1}$）

性质9：两形影对称点整数的对称互素数是同一组对称数。

证：设形影对称点整数为S，$S+P_1P_2\cdots P_m/2$（$P_m<\sqrt{2S}<P_m+1$）。因为S与$S+P_1P_2\cdots P_m/2$两数的剩余对称式，P_1的剩余类，一个数是R_0，那么另一个数一定是R_1，根据性质3，对称点为P_1∽0与P_1∽1的两边，对称剩余类都是{0}⇔{0}，{1}⇔{1}。

三、同类组合对称

定义：我们把以对称点S的以P_2为模的最小非负剩余类相同的整数{P_2n+i}（n=0，1，2，…；i=0,1,2）称为S的同类数或同类对称点整数。把相继f个同类对称点的对称数称为同类组合对称数。

（一）同类对称筛法

性质10：对称点整数S的同类对称点整数的两边都有S的对称互素数中的数对称。

证：设对称点整数为S（$P_m<\sqrt{2S}<P_{m+1}$），那么对称点S的剩余类无论是P_1∽1或P_1∽0，根据性质3，其剩余类对称式为{0}⇔{0}，{1}⇔{1}；在筛取S的对称互素数时，须将{0}的整数筛掉。

当对称点S为P_2∽0，P3∽0，…，P_m∽0时，在筛取S的对称互素数时，根据性质4，{0}⇔{0}，须将{0}的整数都筛掉。

当对称点S为P_2∽i（0≤i＜P_2），P3∽i（0≤i＜P3），…，P_m∽i（0≤i＜P_m）时，筛取S的对称互素数，根据性质5，{0}⇔{2i}，所以须筛去{0}，{2i} 2个类的整数。

当S与S_k同为P_m∽i （0≤i＜P_m） 时，剩余对称式为{i}⇔{i}，…，{0}⇔{2i}，…，{$i-\frac{p_m-1}{2}$}⇔{$i+\frac{p_m-1}{2}$}。在求取S_k的S的对称互素数时，须筛去{0}，{2i}2个类的整数。

当对称点S为P_m∽i，同类对称点S_k为P_m∽0时，S_k的剩余对称式为{0}⇔{0}，{P_m-1}⇔{1}，…，{P_m-2i}⇔{2i}，…，{$P_m-\frac{p_m-1}{2}$}⇔{$\frac{p_m-1}{2}$}。在求取S_k的S的对称互素数时，须筛去{0}，{2i}，{P_m-2i}等3个剩余类的整数。

当对称点S为P_m∽i，S_k为P_m∽2i时，即有{2i}⇔{2i}，{2i-1}⇔{2i+1}，…，{0}⇔{4i}，…，{$2i-\frac{p_m-1}{2}$}⇔{$2i+\frac{p_m-1}{2}$}。在求取S_k的S的对称互素数时，须筛去{0}，{2i}，{4i}等3个剩余类的整数。

当对称点S为P_m∽i，S_k为P_m∽i+r时，即有{i+r}⇔{i+r}，…，{0}⇔{2i+2r}，…，{（i+r）-（i-r）}⇔{（i+r）+（i-r）}={2r}⇔{2i}，…，{$i+r-\frac{p_m-1}{2}$}⇔{$i+r+\frac{p_m-1}{2}$}。在求取S_k的S的对称互素数时，须筛去{0}，{2i+2r}，{2r}，{2i}等4个剩余类的整数。

根据以上证明，我们可以得到公式2

$$\varphi(S_k)=a\left(1-\frac{1}{P_1}\right)\prod_{S_k,P\backsim 0}^{S,P\backsim 0}\left(1-\frac{1}{P}\right)\prod_{S_k,P\backsim i}^{S,P\backsim i}\left(1-\frac{2}{P}\right)\prod_{S_k,P\backsim 2i,0}^{S,P\backsim i}\left(1-\frac{3}{P}\right)\prod_{S_k,P\backsim i+r}^{S,P\backsim i}\left(1-\frac{4}{P}\right.$$

其中 φ（S_k）表示同类对称点整数S_k的S的不大于a的对称互素数个数；a表示$P_1P_2\cdots P_m$ ；$P_1<P\leqslant P_m$；i+r＜P；S，P∽i表示对称点整数S以P为模的剩余类i；S_k，P∽i表示同类对称点整数S_k以P为模的剩余类i。证毕。

（二）同类组合对称方阵

同类组合对称方阵的筛制，设对称点整数为S，S的同类数为

$$i,\ i+3,\ \cdots,\ i+3n,\ \cdots,\ i+P_1P_2\cdots P_m-3 \tag{2}$$

将（2）式列成方阵如下：

$$\begin{array}{cccccccc}
 & j_1, & j_2, & \cdots\cdots & & & & j_{p_1p_2\cdots p_m/3} \\
i_1 & \underline{i,} & i+3, & \cdots, & i+3n & \cdots, & & i+P_1P_2\cdots P_m-3, \\
i_2 & i, & \underline{i+3,} & \cdots, & i+3n, & \cdots, & & i+P_1P_2\cdots P_m-3, \\
 & & & & \cdots\cdots & & & \\
\cdots & i, & i+3, & \cdots, & \underline{i+3n,} & \cdots, & & i+P_1P_2\cdots P_m-3, \\
i_{p_1p_2\cdots p_m/3} & i, & i+3, & \cdots, & i+3n, & \cdots, & & \underline{i+P_1P_2\cdots P_m-3。}
\end{array} \tag{3}$$

将（3）中$ai_1j_1, ai_2j_2, \cdots, ai_{p_1p_2\cdots p_m/3}j_{p_1p_2\cdots p_m/3}$各元素设为各行的同类对称点，将其称为同类组合对称点。将方阵（3）各行中，按设定的同类对称点整数的剩余对称式，根据同类对称筛法，筛取S的对称互素数，我们将筛制的方阵称为同类组合对称方阵。

下面根据同类组合方阵讨论有关性质。

性质11：相继4个以上的同类组合对称点整数中，任意两个偶数与偶数，奇数与奇数都两两发生对称。

证：设同类对称点整数数列为：i，i+3，…，i+3n，…，i+6n-3，i+6n，（i+3n为数列的对称点;n=0，1，2，…，）　　　　（4）

i，i+6，…，i+6n，…，i+12n-6，i+12n，　（a）

i-3，i+3，…，i+6n-3，…，i+12n-9，i+12n-3，　（b）

……

i-6n，i-6n+6，…，i，…，i+6n-6，i+6n，（c）

数列（a）是同类数i以数列（4）各数为对称点的对称数数列。是（4）中的{i+6n}的全部项。数列（b）是同类数i+3以数列（4）各数为对称点的对称数数列。是（4）中，{i+6n-3}的全部项。数列（c）是数列（4）中最后一项i+6n以（4）中各数为对称点的对称数数列。是（4）中{i+6n}的全部项。

因此，数列（4）中任取一数分别与（4）中各数为对称点的对称数，都包含了（4）中{i+6n}或{i+6n-3}的全部项。根据性质2，所取一数为偶数时，那么该数与（4）中的所有偶数都发生了对称。证毕。

性质12：以P_m为模的一组最小非负完全剩余组的对称方阵，以方阵中心列为各行的对称点，那么任一类所对称的类，都是一组模P_m的最小非负完全剩余组。

证：设以P_m为模的一组最小非负完全剩余组的对称方阵为

$$
\begin{array}{lllllllll}
1-\frac{p_m-1}{2}, & \cdots, & p_m-1, & 0, & 1, & 2, & 3, & \cdots, & 1+\frac{p_m-1}{2}, \\
2-\frac{p_m-1}{2}, & \cdots, & 0, & 1, & 2, & 3, & 4, & \cdots, & 2+\frac{p_m-1}{2}, \\
 & & \cdots\cdots, & & & & & & \\
P_m-\frac{p_m-1}{2}, & \cdots, & p_m-2, & p_m-1, & 0, & 1, & 2, & \cdots, & \frac{p_m-1}{2}\text{。}
\end{array}
\qquad (5)
$$

我们以方阵（5）的中心列1,2,…，0类分别为各行的对称点，那么剩余类i（$0\leqslant i<P_m$）所对称的类为

i,1,1+(1-i)=2-i；i,2,2+(2-i)=4-i；……；i,n,n+(n-i)=2n-i；……；i,0,0+(0-i)=P_m-i。

当等式右边2n-i=0（n=1，2，…，）时，即有：

$$2n-i=0,\ 2(n+1)-i=2,\ 2(n+2)-i=4,\ \cdots\cdots,\ 2\left(n+\frac{p_m-1}{2}\right)-i=p_m-1,\ 2\left(n+\frac{p_m-1}{2}+1\right)-i=1,\ 2\left(n+\frac{p_m-1}{2}+2\right)-i=3,\ \cdots,$$

$$2\left(n+\frac{p_m-1}{2}+\frac{p_m-1}{2}\right)-i=p_m-2\text{。}$$

可以看出，等式右边是模P_m的一组最小非负完全剩余组。证毕

性质13：同类组合对称方阵中，任一列整数所对称的数是一组斜率为1:2的{6n+e}的数列。

证：设同类组合对称点整数为i，i+3，…，i+3n（n=0，1，2，…，）。任取方阵一列整数b，即有：b　i　2i-b；b　i+3　2i-b+6；……；

b　i+3n　2i-b+6n。

2i-b可记为6c+e。即有：6c+e+6n=6（c+n）+e

对称式（6）的左对称距为i+3n-b，右边对称距为2i-b+6n-i-3n=i+3n-b，所以总对称距为2（i+3n-b）。因为同类对称点整数是方阵对角线上的数列，其排列线斜率是1：1。所以b的对称数2i-b，2i-b+6，…，2i-b+6n的排列线的斜率为1：2的{6n+e}的数列，证毕。

性质14：对称点整数S的剩余对称式中，模P_m的{0}⇔{2i}时。同类组合对称方阵中，列的整数a的数列中相继P_m个数中，有两个数分别是排列线为1:2的{6n+e}（e<6）数列中，$P_m \backsim 0$及$P_m \backsim 2i$的整数所对称的数。

证：设对称点整数S以P_m为模{0}⇔{2i}。同类组合对称方阵中，列的整数a的剩余类为$P_m \backsim r$（$0\leqslant r\leqslant P_m$）。根据性质12，在同类组合对称方阵中$P_m \backsim 0$及$P_m \backsim 2i$的整数在相继$P_m$个同类对称点整数中，所对称的数都是一组模$P_m$的完全剩余组的整数。而$P_m \backsim r$是模$P_m$的完全剩余组中的一个类，所以整数a既是$P_m \backsim 0$的整数对称数，又是$P_m \backsim 2i$的整数的对称数。 证毕。

性质15：同类组合对称方阵中，每列整数对称的数是对称点整数S的一组排列线斜率为1:2的完全对称互素数。

证：设对称点整数S的剩余对称式中$P_1 \backsim 0 \Leftrightarrow P_1 \backsim 0$，$P_2 \backsim 0 \Leftrightarrow P_2 \backsim i$，$P_3 \backsim 0 \Leftrightarrow P_3 \backsim e$，$P_4 \backsim 0 \Leftrightarrow P_4 \backsim c$，…，$P_m \backsim 0 \Leftrightarrow P_m \backsim h$，整数1,2，…，$P_1P_2\cdots P_m$（$P_m<\sqrt{2S}<P_m+1$）的方阵为1,2，…，$P_1P_2\cdots P_m$，按照对称点整数S的剩余对称式，筛去方阵式的对称类后，方阵剩下的各列整数是S的一组完全对称互素数。

根据性质13，同类组合对称方阵中，每列数对称的数是排列线斜率为1：2的{6n+r}（n=0,1,2，…；6，r=1；r＜6）的数列。根据同类对称筛法，按照各同类对称点的剩余对称式，将列中与{6n+r}数列中S的$P_3∽0$，$P_3∽e$，$P_4∽0$，$P_4∽c$，…，$P_m∽0$，$P_m∽h$的整数所对称的数筛去，那么剩下的数即是列的整数与S的一组排列线斜率为1:2的完全对称互素数对称的数。证毕。

性质16：同类组合方阵中任何与对称点整数S的素数对称域对称的互素数对称域，若素数对称域无对称素数，那么与其对称的互素数对称域也无S的对称互素数。若互素数对称域中有S的完全对称互素数分布，那么S的素数对称域也有对称素数。

证：设对称点整数S的同类数为：

i,…,S，…,2S-i,…,i+3n，…,3i-2S+6n,…,2i-S+6n,…,i+6n-3,i+6n,…,$i+P_1P_2\cdots P_m-3$（$0\leqslant i<P_2$，n=0,1,2,…,$P_m<\sqrt{2S}<P_{m+1}$）

将（9）中素数对称域i,…，S,…，2S-i以同类数i+3n，i+3n+3，i+3n+6，…，i+3n+S-i为对称点，即有

素数对称域	对称点	互素数对称域			
i,…，S,…，2S-i，	i+3n，	3i+6n-2S，	…，	i+6n，	
i,…，S,…，2S-i，	i+3n+3，	3i+6n-2S+6，	…，	i+6n+6，	（10）
	……，				
i,…，S,…，2S-i，	i+3n+S-i，	i+6n，	…，	6n+2S-i。	

根据性质11，在以式为同类组合对称数的方阵中，任意偶数与偶数，奇数与奇数都两两发生对称，而S的素数对称域与其互相对称的互素数对称域中的部分对称域，根据同类对称数的筛法，两对称域按照对称点S的剩余对称式中$P_1∽0⇔P_1∽0$，$P_2∽0⇔P_2∽r$（$<P_2$），$P_3∽0⇔P_3∽t$（$<P_3$），…，$P_m∽0⇔P_m∽f$（$<P_m$）及这些剩余类在各同类对称点整数的同模剩余对称式中，所对称的剩余类都筛去。筛去的数都是两两对称的数，若有剩下的数也是两两对称的数。　证毕。

定理1：大于3的整数两边都有对称素数。

证：设对称点整数为S（$P_m<\sqrt{2S}<P_m+1$），不大于$P_1P_2\cdots P_m$的S的同类整数有:i，i+3，i+6，…，i+3n，…，$i+P_1P_2\cdots P_m-3$。将数列分段列出与S的素数对称域2S-2i对称的互素数对称域：

根据公式1，我们可以计算出方阵中S的完全对称互素数共有φ（S）组。这φ（S）组完全对称互素数，无论分布在任何段同类组合对称域中，因为所有同类组合对称域都以不同的同类组合对称数为对称点与素数对称域对称，根据性质16，若同类组合对称域中有S的对称互素数分布，那么素数对称域一定有对称素数。证毕。

推论1：任意大于6的偶数都可以表为两素数之和。

证：根据定理1，大于3的整数两边都有对称素数。又根据性质1，两对称数之和是对称点整数的2倍，所以任意大于6的偶数都可以表为两素数之和。证毕。

参考文献

[1]敏泉,数的整除性[M].北京，科学普及出版社，1981,71-73.

[2]U·杜德利，基础数论[M].上海，上海科学技术出版社，1980,76,219.

作者简介：陈荣如（1948-），男，江西樟树人，高级工程师，从事林业工作。