巧记三角函数的诱导公式及其应用

韦庆妮
东兴市东兴中学

摘　要：首先要求学生必须熟记几个特殊角的三角函数值，然后借助图形记忆三角函数的诱导公式，根据繁角化简角、负角化正角、大角化小角原则确定“三角”，然后再根据口诀“一全二s三t四c”确定符号“正负”。通过诱导公式的学习及理解，使学生能快速理解公式，从而能正确、熟练地使用公式解决问题。

关键词：三角函数；诱导公式；数形结合
【DOI】10.12252/j.issn.2096-6288.2022.03.201

函数，一直以来都是学生觉得很抽象，难以理解，不易攻破的知识板块，三角函数也不例外，特别是公式如此之多，学生的记忆负担很重，记不好，那谈何应用呢？在教材中，利用单位圆的对称性推导诱导公式，培养学生用几何方法研究代数问题的意识，我认为，在推导的过程中学生应该是可以接受的，而且还总结了一个口诀“奇变偶不变，符号看象限”，但是，在学生真正接触到三角函数时，大部分学生（特别是基础相对薄弱）很难去辨别角的奇偶性，那就走不下去了，做着做着，学生对此类题型就失去信心，从而不敢接触。我们知道在高考中三角函数所占的分值还是比较重的，特别是三角函数的诱导公式又是解决三角函数问题的基础，因此，我觉得应该寻找更适合学生理解和记忆的方法，在我十几年的教学生涯中，总结了我认为学生比较容易理解和接受的记忆方法，具体步骤如下。

一、必须熟记特殊角的三角函数值

因为使用三角函数的诱导公式的原则是“繁角化简角、负角化正角、大角化小角”，所谓简角、正角和小角，其实一般都是零角、锐角和直角，因此要求学生必须熟记几个特殊角的三角函数值，而特殊角为0、$\frac{\pi}{6}$、$\frac{\pi}{4}$、$\frac{\pi}{3}$、$\frac{\pi}{2}$，它们的三角函数值，即正弦值、余弦值和正切值，记忆特殊角的三角函数值有很多方法，可以通过单位圆，也可以通过三角函数的图像，也可以同时结合同角三角函数的基本关系式，即平方关系和商数关系等等，我认为可以通过如下表进行记忆，如图所示：

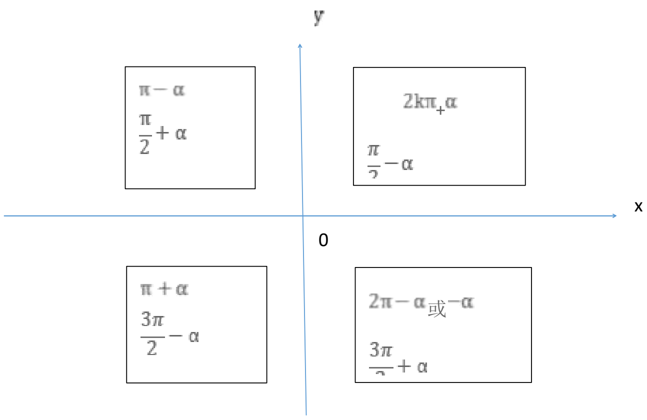
α	0°	30°	45°	60°	90°
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	$0\left(\frac{\sqrt{0}}{2}\right)$	$\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{1}}{2}\right)$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$1\left(\frac{\sqrt{4}}{2}\right)$
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	不存在

特殊角的正弦值可以根据正弦函数在$\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$上的图像是单调递增的，形象地说正弦她很“乖”，随着角的增大正弦值增大，而且可以把她看成$\frac{\sqrt{0}}{2}$、$\frac{\sqrt{1}}{2}$、$\frac{\sqrt{2}}{2}$、$\frac{\sqrt{3}}{2}$、$\frac{\sqrt{4}}{2}$，逐渐递增的形式比较好记，特殊角的余弦值可以把他当做比较调皮、叛逆的孩子，在$\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$上他的值刚好与正弦值相反，对调过来即可，而正切值可以根据同角三角函数的基本关系式的商数关系$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$得到，值也是递增的。

二、借助直角坐标系记住角所属的象限

从x轴的正半轴开始逆时针旋转，角是逐渐增大的，在x轴正半轴为0弧度，y轴的正半轴为$\frac{\pi}{2}$弧度，在x轴负半轴为π弧度，y轴的负半轴为$\frac{3\pi}{2}$弧度，在x轴正半轴为2π弧度，把α“看作”锐角，一定要好好理解这个“看作”，也就是说这个“α”其实不一定是锐角，它可能是更大的角或者是一个整体，因此这里的“看作”要把握好。锐角是第一象限角，根据所有与角α终边相同的角的集合我们可以把第一象限角“看作”2kπ+α，第二象限角“看作”π－α，由于还没到π，所以是π－锐角，第三象限角超过π则“看作”π＋α，第四象限角还没到2π，则“看作”2π－α，或者“看作”－α（从在x轴正半轴顺时针旋转α角），在直角坐标系上可以直观地表示每一个象限角，而且通过观察可知π与2π的终边都x轴上，因此可得这五个角的三角函数值的三角函数名是不变的。同时直角坐标系的四个象限也可以表示为，第一象限角

“看作”$\frac{\pi}{2}-\alpha$，由于还没到$\frac{\pi}{2}$，因此是$\frac{\pi}{2}$-锐角，第二象限角“看作”$\frac{\pi}{2}+\alpha$，第三象限角“看作”$\frac{3\pi}{2}-\alpha$，第四象限角“看作”$\frac{3\pi}{2}+\alpha$，同理，可知$\frac{\pi}{2}$与$\frac{3\pi}{2}$的终边落在y轴上，这四个角的三角函数值的三角函数名是需要改变的。以下是通过直角坐标系展示九个象限角，从而也可以提升学生的数形结合思想，“形”的感觉。



三、熟记口诀，巧记三角函数值的符号

“一全二s三t四c”!指的是：在第一象限所有的三角函数值的符号都是正的，在第二象限只有角的正弦值$\sin\alpha$是正的，在第三象限只有角的正切值$\tan\alpha$是正的，在第四象限只有角的余弦值$\cos\alpha$是正的。

以下是三角函数的诱导公式的具体展示：

三角函数名不变的诱导公式：

$$\text{第一象限角}\begin{cases}\sin(2k\pi+\alpha)=\sin\alpha\\ \cos(2k\pi+\alpha)=\cos\alpha,\\ \tan(2k\pi+\alpha)=\tan\alpha\end{cases}$$

$$\text{第二象限角}\begin{cases}\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha\\ \cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha\\ \tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha\end{cases}$$

$$\text{第三象限角}\begin{cases}\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha\\ \cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha,\\ \tan(\pi+\alpha)=\tan\alpha\end{cases}$$

$$\text{第四象限角}\begin{cases}\sin(2\pi-\alpha)=-\sin\alpha\\ \cos(2\pi-\alpha)=\cos\alpha,\\ \tan(2\pi-\alpha)=-\tan\alpha\end{cases}$$

$$\text{第四象限角}\begin{cases}\sin(-\alpha)=-\sin\alpha\\ \cos(-\alpha)=\cos\alpha\\ \tan(-\alpha)=-\tan\alpha\end{cases}$$

三角函数名改变的诱导公式：

$$\text{第一象限角}\begin{cases}\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\cos\alpha\\ \cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\sin\alpha,\\ \tan(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\cot\alpha\end{cases}$$

$$\text{第二象限角}\begin{cases}\sin((\frac{\pi}{2}+\alpha))=\cos\alpha\\ \cos((\frac{\pi}{2}+\alpha))=-\sin\alpha\\ \tan((\frac{\pi}{2}+\alpha))=-\cot\alpha\end{cases}$$

$$\text{第三象限角}\begin{cases}\sin(\frac{3\pi}{2}-\alpha)=-\cos\alpha\\ \cos(\frac{3\pi}{2}-\alpha)=-\sin\alpha,\\ \tan(\frac{3\pi}{2}-\alpha)=\tan\alpha\end{cases}$$

$$\text{第四象限角}\begin{cases}\sin(\frac{3\pi}{2}+\alpha)=-\cos\alpha\\ \cos(\frac{3\pi}{2}+\alpha)=\sin\alpha,\\ \tan(\frac{3\pi}{2}+\alpha)=-\cot\alpha\end{cases}$$

根据以上的“三部曲”，相信学生们可以比较自信地使用三角函数的诱导公式把繁角化简角、负角化正角、大角化小角。理论是理解了，但更重要的还是实操。以下是通过几个案例对巧记三角函数的诱导公式的应用。

四、案例实操

（一）案例一

已知$\cos(\pi+\theta)=\frac{\sqrt{3}}{6}$，则$\cos\theta=$（　　）

A. $\frac{\sqrt{3}}{6}$　　B. $-\frac{\sqrt{3}}{6}$

C. $\frac{\sqrt{33}}{6}$　　D. $-\frac{\sqrt{33}}{6}$

解析：因为$\pi+\theta$“看作”第三象限角，余弦值是负的，π的终边是落在x轴上的，因此函数名不变，所以$\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{6}$，所以$\cos\theta=-\frac{\sqrt{3}}{6}$.

选择B

（二）案例二

2.计算$\sin^2 150°+\sin^2 135°+2\sin 210°+\cos^2 225°$的值是（　　）

A. $\frac{1}{4}$　　　　B. $\frac{3}{4}$

C. $\frac{11}{4}$　　　　D. $\frac{9}{4}$

解析：根据诱导公式把大角化小角，

$$\sin 150^{\circ} = \sin(180^{\circ} - 30^{\circ}) = \sin 30^{\circ} = \frac{1}{2}$$

$$\sin 135^{\circ} = \sin(180^{\circ} - 45^{\circ}) = \sin 45^{\circ} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\sin 210^{\circ} = \sin(180^{\circ} + 30^{\circ}) = -\sin 30^{\circ} = -\frac{1}{2}$$

$$\cos 225^{\circ} = \cos(180^{\circ} + 45^{\circ}) = -\cos 45^{\circ} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$原式 = \frac{1}{2}^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}^2 + 2 * -\frac{1}{2}^2 + -\frac{\sqrt{2}}{2}^2 = \frac{1}{4}$$

选择A

（三）案例三

3.求值：

(1) $\cos\frac{29\pi}{6}$=______；

(2) $\tan(-855^{\circ})$=______.

【解析】(1) $\cos\frac{29\pi}{6}=\cos\left(4\pi+\frac{5\pi}{6}\right)=\cos\frac{5\pi}{6}=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=-\cos\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(2) $\tan(-855^{\circ})=-\tan 855^{\circ}=-\tan(2\times 360^{\circ}+135^{\circ})=-\tan 135^{\circ}=-\tan(180^{\circ}-45^{\circ})=\tan 45^{\circ}=1$.

【答案】(1) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$　(2) 1

三角函数的诱导公式的案例还是很多的，虽然它是一个非常基础的公式，但是如果没有很好地理解并记忆，学生常常用起来觉得没有头绪，不知从何出发，很乱，因此我希望学生能掌握一定的记忆方法，比较形象理解去记忆，让学生找回自信心，慢慢地获得成就感，不断增强学习的求知欲，特别是学习数学的欲望，对于学习数学，他们就觉得有希望！应该说，这也就是教育的希望！

参考文献

[1]韩玉明.数形结合巧记三角函数的“诱导公式”[J].科教文汇（上旬刊），2017（02）：100-102.

[2]黄邵华，何娇.形之完美表达　数之完美表现——对诱导公式教学的深入思考和分析[J].数学通报，2019，58（09）：50-51+55.