

“变式训练”在数学课中的作用

章纪林

上海现代化工职业学院

摘要:所谓“变式”，就是指教师有目的、有计划地不断更换命题中的非本质特征：变换问题中的条件或结论；转换问题的内容和形式，但保留好对象中的本质因素，从而使学生掌握数学对象的本质属性。数学课中进行变式训练，在不断的变化中，吸引学生的注意、调动学生的思维、提高学生的学习兴趣 and 热情；在不断的变化中，发现其中不变的内在规律，深化对定理、公式的理解和运用，促进认知结构的内化，提高数学能力。

关键词:变式训练；三校生；重要性

【DOI】10.12252/j.issn.2096-6288.2022.05.170

一、问题的提出

笔者是一位从教多年的中职数学教师，近几年一直在进行三校生的数学复习教学，一次在《三角函数》章节复习结束之后的阶段测试中有一道填空题：

计算： $\sin(\alpha + \frac{\pi}{3})\cos\alpha - \cos(\alpha + \frac{\pi}{3})\sin\alpha$ 的值

原以为这是一道正弦的两角和差公式 $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$ 的基本应用，没想到大部分学生都没有得分，感到很疑惑，是什么原因导致这样的结果呢？后来专门在学生中进行了调查，发现学生都能记住这个公式，也能进行如：

$$\sin(x - \frac{\pi}{3})、\sin 21^\circ \cos 39^\circ - \cos 21^\circ \sin 39^\circ$$

这种式子的展开和计算，问题的关键是学生在这道填空题中不能把 $(\alpha + \frac{\pi}{3})$ 看成一个整体，没有发现这是一个符合正弦两角和差公式的基本形式，对正弦两角和差公式的本质规律没有真正掌握，只能进行对公式直接代入应用，就不能达到对知识的灵活应用，我们的教学目标就没有实现，由此可见在数学课中进行变式训练，深化对定理、公式的理解显得尤为重要。

数学变式训练，指的是通过对一个问题的理解、掌握，达到对此一类问题进行解决的目的，该方法能调动学生学习积极性，提高学生应用和发散思维的能力，从而提升学生学习能力，提高学生独立思考的意识。通过变式训练的应用，能有效的对一个孤立问题进行不同角度的扩散理解，从而使学生掌握一定规律，提升学生的思考、认知能力，使学生在答题过程中，去积极的寻找此类型问题的思路、方法，从而提升学生思维活动能力。该方法在调动学生学习积极性的同时，培养学生独

立思考的能力，真正把提高学生学习能力落到实处。该方法也有效降低了学生大量、重复的去做同类型题，减小了做题数量，使学生从题海中走出来，从而实现了增效、减负的双重目的。

二、数学课中运用变式训练的实践

三校生数学高考，主要是以基础知识、基本技能为考查目标，历届的高考题都反映出要求学生能灵活应用数学基础知识、熟练掌握数学基本技能。所以在平时的教学中我们不应追求难度较高的题目，也不是直接讲述基础知识，而是应该通过课堂变式训练让学生理解数学知识的内在规律，从而能灵活运用数学知识解决数学问题，提高数学能力。下面我谈谈自己的做法。

(一) 通过变式训练，使学生更好地掌握数学基础知识

数学基础知识就好比是一幢高楼的地基，只有地基坚固了，高楼才安全持久，才能使学生灵活运用数学知识解决问题，但在平时的教学中，往往仅仅依靠老师的情景创设和知识讲解学生可能无法全面理解数学知识的内涵，所以需要运用更加丰富的教学手段帮助学生深层次理解知识点。

例如为了让学生掌握双曲线的标准方程的特征、焦点坐标、字母之间的关系，如果仅有“求双曲线 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1$ 的焦点坐标”此类简单模仿性的问题，学生对双曲线的标准方程的了解可能还是表面的，很不清晰的，但如果通过以下的变式训练，教学效果会大不相同：

变式1：求双曲线 $x^2 - y^2 = 4$ 的焦点坐标

变式2：求双曲线 $2y^2 - 4x^2 = 1$ 的焦点坐标

变式3：若双曲线 $\frac{x^2}{m} - \frac{y^2}{3} = 1$ 的一个焦点坐标为

(4, 0), 求m的值

变式4: 若曲线方程为 $\frac{x^2}{m} + \frac{y^2}{4} = 1$, 当 $m < 0$ 时, 求曲线的焦点坐标

通过以上各种形式题型的训练, 可以对双曲线的标准方程的理解逐渐加深, 更加全面, 也有助于学生养成深入思考问题的习惯、抓住数学问题的本质和规律, 理解数学基础知识的内涵。

(二) 通过变式训练, 使学生很好地记忆并灵活应用数学公式

在数学学习中, 基本公式是非常重要的, 这种重要性不但体现在平时的解题过程中, 也体现在学生对知识的灵活运用中, 有时也是解题思路的方向。但是数学基本公式较多, 许多学生特别是基础较差的学生总是记不住公式, 有时记住了公式也不会使用。所以在课堂上通过变式训练, 让学生在不断地使用公式中记忆公式, 在不断地变化中了解公式的基本特征, 从而牢固掌握数学公式。

例如在学习“点到直线的距离公式”时, 对基本计算题“求点(2, -3)到直线 $3x+4y+1=0$ 的距离”可以通过以下的变式训练, 使学生熟练掌握公式, 并能灵活应用:

变式1: 求点(0, -3)到直线 $3x+4y=1$ 的距离

变式2: 求点(2, -3)到直线 $y=2x$ 的距离

变式3: 若原点到直线 $ax+y-12=0$ 的距离为6, 求a的值

变式4: 已知A(-2, -1), B(1, 2), C(4, -3), 求 $\triangle ABC$ 的面积

变式5: 若直线 $x+y=k$ 与圆 $x^2+y^2=1$ 相切, 求实数k的值

通过以上的变式训练, 不仅可以使学生更清晰地了解点到直线的距离公式的特征、应用公式时的注意地方, 也使学生了解到点到直线的距离公式可以解决的一些问题, 从而对公式有一个更全面的掌握, 让学生意识到学好数学公式的重要性, 提高学习数学的热情。

(三) 通过变式训练, 让学生牢固掌握数学的基本方法

数学方法作为学习的一项重要内容, 学生要想达到熟练掌握的目的, 一般需要改变该类型题目的问题、条件、背景, 通过不断的模仿该类型的题目, 从实现到训练的目的。因此在数学教学中, 通过设计变式问题, 可以高效、准确的帮助学生熟悉此类型题目的解题思路。

例如在学习“直线方程的几种形式”时, 为了使学生更好地掌握求直线方程的基本方法, 采用变式训练的教学形式, 会收到较好的教学效果:

变式1: 求经过点A(0, -3)且倾斜角为 120° 的直线方程

变式2: 条件改成两个点A(0, -4)和B(-2, 1)

变式3: 条件改成一个点A(0, -2)和倾斜角的余弦值是 $\frac{1}{3}$

变式4: 条件改成一个点A(0, -1)和倾斜角的正弦值是 $\frac{1}{3}$

变式5: 条件改成一个点A(0, -5)和倾斜角是直线 $x-2y-2=0$ 的倾斜角的2倍

为了让学生更好地掌握求直线方程的基本方法, 首先安排了变式1、变式2中的简单训练, 通过两个不同背景的变式训练, 帮助学生复习直线斜率的两种基本计算。而变式3、变式4进一步强调直线的斜率等于倾斜角的正切, 利用三角比公式进行求解, 而变式4又要通过分类讨论来求解, 与变式3有条件上的区别, 要引导学生其中的不同。变式5的难度有所加强, 对学生由倾斜角灵活转化出斜率提出了更高要求。通过这组变式训练, 使学生逐步领会求直线方程的基本思路和基本方法, 有助于深化、巩固知识, 归纳能力也有了进一步提高, 更重要的是培养学生的探究意识。这样的变式训练, 让学生牢固掌握数学的基本方法, 对三校生来说有着普遍的意义。

(四) 让学生参与变式训练的编题, 提高学生学习积极性, 培养参与意识

在变式训练中, 教师不能总是自己变化题型, 然后让学生练, 要鼓励学生主动参与研究题型, 可以通过提示、增加条件等方式引导学生自己编题, 然后再练习, 这样的课堂对学生具有挑战性, 所以学生的学习兴趣大, 当然先从简单的题型开始, 让人人都能动手, 逐步提高要求, 使题目具有一定的梯度, 学生学习的积极性就非常高, 也能更好地锻炼学生的思维能力。

例如在学习“三角比”章节时, 其中的三角公式比较多, 学生很难记忆, 特别是对于公式之间的灵活应用更是感到困难。所以在学习时, 我们可以通过引导, 让学生对例题进行变题, 尝试进行编题, 然后再进行这样的变式训练, 不仅能提高学生的学习兴趣, 也能使学生在轻松的学习过程中记住公式, 还能对公式的应用和

之间的联系有了更清晰的了解。如在学习例题“已知 $\sin \theta = \frac{1}{3}$, $\theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, 求 $\tan(\frac{3\pi}{2} - \theta)$ 的值”时, 首先通过全班分析, 寻找本题的解题思路、解题方法和所用到的知识点, 温习三角比的符号、同角三角比的关系、三角比的简化公式等知识点, 介绍完整的解题过程。然后引导学生从以下几个方面进行尝试编题, 进行变式训练, 可以帮助学生把这些三角比的公式熟练记忆:

变式1、对已知条件中的三角名称进行变式, 可以把正弦变为余弦或正切

变式2、对已知条件中的角的范围进行变式, 把角的范围改成不同的象限

变式3、对所求的三角名称进行变式, 可以把正切改为正弦或余弦

变式4、对所求的简化公式进行变式, 可以把 $\frac{3\pi}{2} \pm$ 改成 $\frac{\pi}{2} \pm$ 或 $\pi \pm$

通过这样的一个创编变式题的训练过程, 学生一定会对三角比的符号、同角三角比的关系、三角比的简化公式等知识点掌握得更加熟练, 不会再惧怕三角比的公式了, 而且这个过程也在帮助学生在解题过程中归纳解题方法, 这是一个整理知识、提升理解的过程。把难记的公式记忆方式进行改变, 让学生找到突破口, 也使大部分学生对当堂课内容产生兴趣产生了兴趣。

三、变式教学的成效与分析

变式教学是一种教学形式, 要想它能取得较好的课堂教学效果, 必须充分考虑上述教学因素; 变式教学是外因, 学生的学习活动则是内因, 变式教学能为学生提供更多的主动参与学习的时间、空间, 促进学生学习的内化的机会。

在数学课中实施变式教学, 不仅能缓解学生对数学学习的恐慌、逆反心理, 而且能提升学生对数学的学习兴趣, 使学生爱学、想学, 从而实现数学教学的魅力, 使学生在数学学习种体会数学的乐趣, 改变以往的枯燥、乏味。同时, 经过学生自主学习的实践证明, 通过对数学问题的变式, 提供适当地知识铺垫, 由于教师向学生展示了数学知识到发生, 形成与发展的过程, 使学生体验到知识是如何从已有知识中逐渐演变或发展而来的, 从而真正理解知识到来龙去脉, 形成一个知识网络, 将这种有层次推进的变式训练用于概念形成、问题解决和构建活动经验系统, 就会帮助学生能对所学内容

融会贯通, 构建起良好的知识结构, 培养出解决问题的能力, 又避免了反复的机械性训练。一言以蔽之, 学生在学习数学过程中, 通过训练几道练习题, 并且掌握该类型题的思路方法, 从而达到做一百道题的效果, 真正达到了教育界所倡导的“高质轻负”, 同时让学生领略到数学的和谐、奇异与美妙, 收到极好的学习效果。

经过几年的不懈实践和尝试, 发现在数学课中应用“变式教学”, 对提升课堂教学效果、全面提高数学教学质量方面有一定的作用, 学生的学习能力有了很大的提高, 自主学习的能动性也有了很大的改善, 学生的学习成绩整体上有了很大的提高。

参考文献

- [1] 蔡茂双. 试析中职数学教学中如何有效运用问题导学法[C]//廊坊市应用经济学会. 对接京津——新的时代 基础教育论文集. [出版者不详], 2022: 5.
- [2] 罗理想. 以变式训练提高高中学生的数学解题能力[J]. 数学大世界(下旬), 2022(08): 59-61.
- [3] 张金军. 浅析高中数学解题教学中变式训练的重要性[J]. 新课程, 2022, No. 624(16): 122-123.
- [4] 王年. “变式训练”在数学情境教学中运用策略的研究[J]. 中学生数理化(教与学), 2020(10): 82-83.
- [5] 如何将数学美融入高职数学课教学中[J]. 王灵芝. 天津职业院校联合学报, 2011(01)
- [6] 高职数学课教学改革初探[J]. 万香芝; 于莹. 职业时空, 2009(03)
- [7] 提高高职数学课程学生学习参与度的实践研究[J]. 王浩. 中外企业家, 2018(25)
- [8] 浅谈高职数学的教学方法与手段[J]. 任悦. 散文百家(新语文活页), 2017(04)
- [9] 参与式教学在中学化学的应用浅析[J]. 陆锦. 时代教育(教育教学版), 2009(03)
- [10] 参与式教学法在生物教学中的运用研究[J]. 周伟祥. 成才之路, 2016(09)
- [11] 提高参与式数学教学的有效性[J]. 石开文. 新课程学习(上), 2013(03)
- [12] 参与式教学法在高中地理教学中的运用[J]. 崔晓玲. 新课程导学, 2015(17)
- [13] 参与式教学法在数学教学中的实验研究[J]. 苏怀鹏. 中学教学参考, 2012(10)
- [14] 如何进行参与式教学[J]. 陈爱明. 思想政治课教学, 2010(03)