

线性代数课程教学的探讨与实践

——以河南工学院为例

高凤霞 孙丽雪

河南工学院理学部

摘要: 线性代数是大学数学中的三大基础课程之一,其中蕴含着重要的思政内容,对培养学生的逻辑思维能力和抽象思维能力起着重要的作用。本文从人文内容、知识点、辩证法的思想等三个方面探讨了线性代数教学中课程思政实施的途径,以此为我国高校的课程思政教育献出一点实践思考。

关键词: 课程思政; 线性代数; 课程教学

【DOI】10.12252/j.issn.2096-6288.2022.08.164

引言

“课程思政”不同于思政课程,其内涵就是要在非思政课程的教学过程中注意融入思政教育元素,充分发挥课堂教学的主渠道作用,把思想政治工作贯穿于教育教学全过程,实现全程育人、全方位育人。课程思政要求教师将价值观引领融入专业知识传授和专业能力培养中,在传授专业课程知识和培养学生解决问题能力的同时,注重提升学生的思想政治素质和人格魅力。

线性代数为高校理工和经管类专业低年级学生开设的一门数学公共基础课程,同时也是研究生入学考试数学科目中的一部分。河南工学院的开课时间选在了大二的上学期。通过本课程的学习旨在培养学生的逻辑思维能力、抽象思维能力和进行复杂科学计算的能力。然而,该课程具有概念公式多、内容抽象、课时少等特点,令大部分学生望而生畏,学习积极性大大减低,从而导致培养目标得不到良好的实现。然而,学校历来重视数学基础课程的学习,又在2018年引入了泛雅教学平台,同时本课程授课教师较多,又和马克思主义学院教师办公地点相邻方便探讨,能够凝聚集体智慧,有利于开展课程思政的教学改革。近年来,理学部线性代数课程组对线性代数课程思政不断探索和实践,结合本校优势,并依托平台建设,逐步实现了融思政元素为一体的线性代数课程知识体系。本课程体系中课程思政的实施通过以下几个途径:

一、利用线性代数的人文内容进行课程思政

查找和整理线性代数发展史上的若干事实,将相关的数学史、中外数学家故事适时、适量、适当地引入课堂,以历史的观点审视学科的发展与进步,帮助学生树立正确的世界观、人生观、历史观、价值观,提升历史

唯物主义观,认识人类社会发展的一般规律,同时以数学家的精神品质感染学生,激发学生的好奇心与求知欲望,培养学生不畏艰难、勇于克服困难的良好精神品质和严谨的求学态度。

例如,开学第一课介绍线性代数发展史时,对数学家李善兰、柯西、莱布尼兹、华罗庚等人的相关资料进行介绍,并对我国数学家李善兰作专题讨论。正是李老当时积极的学习和奉献精神才有了我们今天的代数学和我国大部分的数学著作。同时结合清代彭端淑在《为学一首示子侄》中说的:天下事有难易乎?为之,则难者亦易矣;不为,则易者亦难矣。人之为学有难易乎?学之,则难者亦易矣;不学,则易者亦难矣。并通过两个和尚去南海的故事让学生明白事在人为的道理,在以后人生的道路上,不畏艰难险阻,勇于攀登。

在讲解一般线性方程组求解的高斯消元法时,告诉学生这一名称的由来。高斯消元法是西方国家对行列式或方程组的上三角形化简的“尊称”,事实上,这种方法最早出现在公元一世纪前后我国的《九章算术》一书中,后来经日本传入欧洲。由于并不具体知道出自哪个人发明,所以西方人将这一方法取名为“高斯消元”法。因为他们认为只有当时最聪明的数学家高斯才能发明出这样神奇的方法。事实上,在高斯出生的德国,很多线性代数教科书中把这一方法称为“Traditional method of China”。消元法案例不仅能介绍清楚消元法的核心思想,有利于学生掌握,还能在课堂上普及我们先人的智慧,增强文化自信。另一方面,也要学生认识到我们在某些学科上与西方发达国家的不足,知己知彼方能百战不殆。

矩阵分块就是将一个大矩阵看成由若干个小矩阵组

成,其在数学计算、机器学习等领域中有着广泛的应用。在数学计算中,矩阵分块可以用于高斯消元、LU分解、QR分解等算法中,提高计算效率和精度。在机器学习中,矩阵分块可以用于神经网络的训练、线性回归、主成分分析等算法中,减少计算量和存储空间的需求。矩阵分块体现的是一种化整为零的思想,从而教导学生把自己的梦想细化,分割成若干小目标,然后就是坚持去实现它,直到最后一个小目标的实现。

二、利用线性代数的教学内容进行课程思政

在讲解矩阵的相关概念时,我们通过选用由特殊数字组成的矩阵,比如通过选用建国时间和建党时间组成的矩阵可以引出“国家意识”和“革命传统”等相关的思政元素^[1],还可以选用公益电话110、119、120、122和96110等数字组成的矩阵,普及每个电话的用途,以此提高学生的公共服务意识和社会责任感。

在讲解矩阵可逆的条件时,联想我们每个人的生之路。矩阵只需行列相等和行列式非零就是可逆的,然而我们的人生之路却不是可逆的,没有任何一个操作可以让时光倒流,我们可以重新来过。告诫学生是父母的辛苦和汗水抚养我们长大,是国家的发展才让我们拥有今天这样稳定的学习环境。从而引导学生孝敬父母,并激励学生把握好青春,不要若干年后有“黑发不知勤学早,白首方悔读书迟”中的遗憾,将来能为国家和社会的发展贡献自己的力量。

在讲解可逆矩阵在编码方面的应用时,可以向学生介绍我国的著名密码学专家中国科学院院士王小云拒绝国外的高薪聘请,先后设计了多个密码算法与系统,为国家密码重大需求解决了实际问题,为保护国家重要领域和重大信息系统安全发挥了极大作用。还可以借此介绍成立于2000年底的我国红客联盟组织,一个20多年来一直默默守护着国家信息安全的公益组织。这些不仅可以向学生传递科技报国和科技强国的理念,也同时进行了爱国主义教育。

经济发展和环境问题是当今世界的两大主题。我们当代的大学生不仅是当下国家政策和经济发展的享用者,更是国家未来的建设者和决策者。在讲解矩阵的相似对角化时,可以通过选用经济发展和环境污染关系问题的例子。在已知当年经济发展和污染水平与上一年经济发展和污染水平的关系时,借用《论语·卫灵公》中

的谚语“人无远虑,必有近忧”,自然地要考虑若干年后二者的关系,由此引出矩阵高次幂的计算,为简化高次幂的计算引入相似对角化。通过引例中问题的解决,不仅告诫学生要有长远的眼光,也能引起学生对环境问题的保护意识和社会责任感。

三、利用辩证法的思想进行课程思政

具体与抽象是一对常用的哲学范畴^[2],具体是指可直接感知的事物,尚未经过概括的感性对象;抽象是指从具体事物中总结出来的某类事物共性的指述。抽象不能脱离具体而独自存在。具体与抽象这一辩证关系给人们提供了由感性具体到理性抽象和再由理性抽象到理性具体相结合的认识方法,是人类认识世界的科学方法。探讨二元方程组的求解过程时,当方程组有唯一解时,观察解的表达式蕴含的规律,由此引入二阶行列式表示;再由三元线性方程组有唯一解时,解蕴含的规律,自然地引入n阶行列式表示n元线性方程组的唯一解。通过具体的二元和三元线性方程组的高斯消去法推导而得到n元线性方程组的求解方法,总结规律再应用于具体的多元线性方程组的求解^[3]。再比如,由解析几何中二维和三维向量的内积、长度和垂直关系自然地引入一般n维向量的内积、长度和正交的概念。

辩证唯物主义认为,正与反既是相互对立的又是相互联系的,还可以相互转化的一对矛盾,它们是对立统一的辩证关系。数学中利用反例来判断一个命题是假命题往往会达到事半功倍的效果。例如在讲授矩阵等价与秩的关系时,等价的矩阵秩相等,但秩相等却推不

出矩阵等价,这一点可以通过选择矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 和

$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 来加以说明^[4]。由此提醒学生注意等价的前提是两个矩阵同型。再比如,在讲解相似与特征值的关系时,由相似的定义易知相似矩阵具有相同的特征值,然而特征值相等,矩阵却未必相似,可以通过选择

矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 和矩阵 $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 说明这一点。数学

中的反例反映了数学真理的局限性,让我们更加谨慎地使用数学工具和概念。利用反例教学,不仅打破思维定势,也能使学生学会从本质上解决和分析问题。

变与不变是一对哲学概念。变通常指代某种事物发生改变的过程。它始于古希腊哲学家亚里士多德，他说过：“变是一切事物最根本的本质。”他把变视为客观存在的基础，并认为一切都存在于变的范畴之中。在讲授矩阵的初等变换时，初等变换可以将一个矩阵变换为不同的形式，然而它们的秩却始终相等，由此说明秩是初等变换下的不变量。进一步，在讲授矩阵的相似变换时，告诉学生除了秩是不变的之外，不变的还有特征值和行列式，讲授二次型的化简和实对称矩阵的合同变换时，除了秩不变之外，不变的还有矩阵的正、负惯性指数。由此告诫学生善于透过现象看本质，不要被表象所迷惑。

整体和部分在马克思主义哲学中是一对辩证统一的概念。所谓整体是指事物的全局和发展的全过程，从数量上看它是一；部分是事物的局部和发展的各个阶段，从数量上看它是多。整体和部分既相互区别又相互联系。区别：整体居于主导地位，整体统率着部分，具有部分所不具备的功能；部分在事物的存在和发展过程中外于被支配的地位。部分服从和服务于整体。联系：整体由部分构成，离开了部分，整体就不复存在。部分的功能及其变化会影响整体的功能，关键部分的功能及其变化甚至对整体的功能起决定作用，部分是整体中的部分，离开了整体，部分就不成其为部分。整体的功能状态及其变化也会影响到部分。整体居于主导地位，统率着部分，整体具有部分根本没有的功能。在讲解用初等变换法求解矩阵秩的问题时：

$$\text{已知 } A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 8 & 0 \\ -2 & 4 & -2 & 3 \\ 3 & -6 & 0 & -6 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \text{ 求矩阵}$$

A 和矩阵 $B = (A, b)$ 的秩。

学生首先想到的就是对 A 和 B 分别进行初等行变换化成行阶梯形，两个行阶梯形中非零行的个数就是 A 和 B 的秩。课堂上引导学生首先对 B 进行初等行变换化为行阶梯形，变换结果如下：

$$B = (A, b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & 8 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & -2 & 3 & 3 \\ 3 & -6 & 0 & -6 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{r} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) = \tilde{B}$$

从 \tilde{B} 中有三个非零行易得 B 的秩为3，此时启发学生分析 A 与 B 的关系： A 刚好为 B 的前4列，在初等行变换过程中 B 变成了 \tilde{B} ，那么 A 作为 B 的一部分变成了 \tilde{B} 中的哪一部分呢？让学生观察行变换过程中列的位置没有发生改变， A 刚好变成了 \tilde{B} 中的前四列。整体是行阶梯形矩阵，从左边依次取出几列组成的子矩阵仍然是一个行阶梯形矩阵，从而 \tilde{B} 中的前四列恰恰就是与 A 行等价的阶梯形。自然地，前四列的非零行数就是 A 的秩，这样就不用再对 A 进行化简了。从而培养学生树立全局观念，立足整体，统筹全局，选择最佳方案，实现整体的最优目标。

结语

教学是一个良心活，课程思政更是要求教师首先从自身的责任和努力做起，要求教师在思想政治、道德品质和学识学风等方面以身作则，率先垂范。线性代数课程思政的实施更是一个系统工程，它不是靠哪几个教师一朝一夕完成的，需要全体线代教师的共同努力。随着时代的发展，课程思政也要与时俱进，“活到老，学到老”作为教师教学生涯的写照是最合适的。

参考文献

- [1] 杨威, 陈怀琛, 刘三阳, 高淑萍, 李兵斌. 大学数学类课程思政探索与实践-以西安电子科技大学线性代数教学[J]. 大学教育, 2020, (03): 77-79.
- [2] 恩格斯. 自然辩证法[M]. 北京: 人民出版社, 1984
- [3] 李中, 林全文, 肖劲森. 浅析线性代数教学中的辩证法思想[J]. 产业与科技论坛, 2019, (13): 64-65.
- [4] 王涛, 马新顺, 郭燕. 《线性代数》课程思政的案例及思考[J]. 数学学习与研究, 2020, (10): 54-55.

作者简介: 高凤霞, 1978.11、女、汉、山东省菏泽市、研究生、副教授、代数学及其数学教育。

基金项目: 此文由2021年河南工学院教育工程项目, 项目名称: 线性代数课程思政, 项目负责人: 高凤霞, 项目编号: 1604107。