三角函数线在高等数学中的若干应用

布威麦尔耶姆·艾力　张全全*

昌吉学院数学与数据科学学院

摘　要：三角函数线是三角函数概念中的基本概念之一，是应用几何中的有向线段数值表示三角函数值的一种数形结合方法.借助三角函数线直观特征观察三角函数间的关系是研究解决三角函数相关问题的主要方式.探究三角函数线在高等数学中极限的证明、柯西中值定理的证明以及第二类换元积分的求解中的应用，构建初等数学和高等数学知识之间的联系，提升大学生认识三角函数线对于高等数学学习的重要性.

关键词：三角函数线；第一类重要极限；柯西中值定理；第二类定积分

【DOI】10.12252/j.issn.2096-6288.2022.09.011

引言

人教A版数学教材必修4中概述了三角函数线的定义.高中数学教材中三角公式是通常是用代数的方法来证明，学生对于三角公式的理解存在困难；而借助三角函数线可以让学生直观的理解三角公式，实现三角公式的“图形化”，利用三角函数线使得三角变换变得形象、生动、直观.理清三角公式间的关系.数学公式的教学仅仅采用开门见山的方式、直接给出公式的方式进行教学，严重影响到学生对公式的理解、掌握和灵活运用.如果学生对任何一个数学公式的掌握仅停留在死记硬背、机械套用的阶段，没有理清公式的内涵，导致学生只是知其然而不知其所以然，同时，三角函数线的应用在高等数学学习中具有重要作用，通过对三角函数线的在高等数学中的应用加深学生对于相关知识理解建构.

一、三角函数线及其相关概念

（一）三角函数线的概念[1]

三角函数线是三角函数的图形化表示不仅体现“数形结合”的数学思想而且提供从本质上理解三角函数的思路。下面从图形来认识三角函数线.如图1，角 α 的终边与单位圆交于点 P.过点 P 作 x 轴的垂线，垂足为 M，根据三角函数定义，我们有就有角 α 正对着的弦 MP 为正弦线、角 α 余正对着的弦 OM 为余弦线、角 α 正对着的切线 AT 正切线、角 α 余正对着的切线 BS 为余切线、角 α 正切线与角 α 终边的割线 OT 为正割线、角 α 余切线与角 α 终边的割线 OS 为余割线，则：

正弦线	$\sin\alpha = MP$
余弦线	$\cos\alpha = OM$
正切线	$\tan\alpha = AT$
余切线	$\cot\alpha = BS$
正割线	$\sec\alpha = OT$
余割线	$\csc\alpha = OS$

（二）三角函数线之间关系

1.同角的恒等关系

如图1所示的有向线段 MP、OM、AT、BS、OT、OS 分别是角 α 的正弦线、余弦线、正切线、余切线、正割线、余割线.根据勾股定理知：

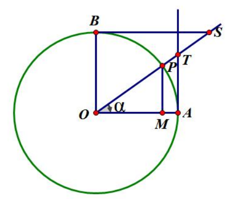


图 1

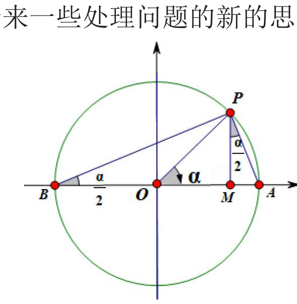
$OM^2+MP^2=1$	即 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$
$OM^2+MP^2=1$	即 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$
$BS^2+OB^2=OS^2$	即 $\cot^2\alpha+1=\csc^2\alpha$

设角 $\angle POA=\alpha$，利用二倍角公式以及三角函数线可得关系可得：

$$\sin\alpha=\frac{MP}{OP}=\frac{\sin\alpha}{1}=\frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}};\quad \cos\alpha=\frac{OM}{OP}=\frac{\cos\alpha}{1}=\frac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}。$$

2.半角正切公式

在苏轼的《题西林壁》诗中写到：横看成岭侧成峰，远近高低各不同。同样是观察同一个事物，角度不同，可能会有不一样的结果。图形来表示半角正切公式当然给我们带来一些处理问题的新的思路与方法。



设角 $\angle POA=\alpha$，在同圆或等圆中同弧所对的圆周角等于圆心角的二分之一。因此 $\angle POA=\alpha$ 即 $\angle PBA=\frac{\alpha}{2}$.在观察图形不难发现三角形 MPA 中，角 $\angle MPA=\frac{\alpha}{2}$。因此有图易知：

$$\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{MP}{OB+OM}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha};\quad \tan\frac{\alpha}{2}=\frac{OA-OM}{MA}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}。$$

二、三角函数线在高等数学中的应用

（一）第一类重要极限中的应用[2]

例1证明第一类重要极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

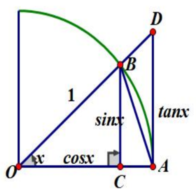


图 2

证：首先注意到函数 $\frac{\sin x}{x}$ 对于一切 $x\neq 0$ 都有定义．如右图示所在四分之一单位圆中，设圆心角 $\angle AOB=x(0<x<\frac{\pi}{2})$，点A处的切线与OB的延长线相较于D，又 $BC\perp OA$，则 $\sin x=CB$，$\tan x=AD$ $x=$弧AB．因为△AOB的面积<扇形AOB的面积<△AOD的面积，所以 $\frac{1}{2}\sin x<\frac{1}{2}x<\frac{1}{2}\tan x$ 即 $\sin x<x<\tan x$，不等式两边都除以 $\sin x$，可得 $1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x}$ 或 $\cos x<\frac{\sin x}{x}<1$．因为当 x 用 $-x$ 代替时，$\cos x$ 与 $\frac{\sin x}{x}$ 都不变，所以上面的不等式对于开区间 $(-\frac{1}{2},0)$ 内的一切 x 也成立．下面来证 $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$ 当 $0<|x|<\frac{\pi}{2}$ 时 $0<|\cos x-1|<1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}<2(\frac{x}{2})^2$ 即 $0<1-\cos x<\frac{x^2}{2}$．当 $x\to 0,\frac{x^2}{2}$ 时，由准则1有 $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)=0$ 所以 $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$ 由于 $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1,\lim\limits_{x\to 0}1=1$ 由不等式 $\cos x<\frac{\sin x}{x}<1$ 及准则1可得 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

分析：第一类重要极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$，用定义和极限运算法则无法证明，需要用夹逼准则证明，学生很难直接构造与 $\frac{\sin x}{x}$ 有关不等式．此时教师引导学生回忆高中阶段学习的三角函数线的知识，借助三角函数线的直观特征，构造并观察图形的几何关系，构建不等式 $\sin x<x<\tan x$，找到问题突破的关键，由此突破第一类极限的证明．

（二）柯西中值定理解题中的应用[2]

例 2　对函数 $f(x)=\sin x$ 及 $F(x)=x+\cos x$ 在区间 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上验证柯西中值定理的正确性．

证　函数 $f(x)=\sin x$ 及 $F(x)=x+\cos x$ 在区间 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上连续，在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 内可导，且在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 内 $F'(x)=1-\sin x\neq 0$ 故 $f(x)$、$F(x)$ 满足柯西中值定理条件，从而至少存在一点 $\xi\in(0,\frac{\pi}{2})$，使 $\frac{f(\frac{\pi}{2})-f(0)}{F(\frac{\pi}{2})-F(0)}=\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$ 可得 $\frac{1-0}{\frac{\pi}{2}-1}=\frac{\cos\xi}{1-\sin\xi}$ 即 $\frac{2}{\pi-2}=\frac{\cos\frac{\xi}{2}+\sin\frac{\xi}{2}}{\cos\frac{\xi}{2}-\sin\frac{\xi}{2}}$，可得 $\tan\frac{\pi}{2}=\frac{4-\pi}{\pi}$．所以 $\xi=2n\pi+2\arctan\frac{4-\pi}{\pi}$ 由题设取 $n=0$，得 $\xi_0=2\arctan\frac{4-\pi}{\pi}$．因 $0<\frac{4-\pi}{\pi}<1$，故 $\xi_0=2\arctan(\frac{4-\pi}{\pi})\in(0,\frac{\pi}{2})$．因此柯西中值定理对函数 $f(x)=\sin x$ 及 $F(x)=x+\cos x$ 在区间 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上连续．

分析：这题从 $\frac{1}{\frac{\pi}{2}-1}=\frac{\cos\xi}{1-\sin\xi}$ 中存在两个变量 $\sin\xi$ 和 $\cos\xi$，直接求解未知量 x 显然是存在困难，首先需要将两个变量 $\sin\xi$ 和 $\cos\xi$ 转化为同一个变量，找到解题的关键，利用三角函数线和倍角关系可知 $\sin\alpha=\frac{2\tan\frac{\xi}{2}}{1+\tan^2\frac{\xi}{2}}$ $\cos\alpha=\frac{1-\tan^2\frac{\xi}{2}}{1+\tan^2\frac{\xi}{2}}$ 建立 $\tan\frac{\xi}{2}$ 与两个变量 $\sin\xi$ 和 $\cos\xi$ 关系，化简原式得到 $\frac{1+\tan\frac{\xi}{2}}{1-\tan\frac{\xi}{2}}=\frac{2}{\pi-2}$，问题转化为学生熟悉的正切函数的形式，问题得到解决．

（三）不定积分中的应用[2]

例3 求 $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}(a>0)$．

解：利用三角函数线性质 $1+\tan^2 t=\sec^2 t$，来化去根式．设 $x=a\tan t(-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2})$，则 $\sqrt{x^2+a^2}=\sqrt{a^2\tan^2 t+a^2}=a\sqrt{\tan^2 t+1}=a\sec t$，$dx=a\sec^2 tdt$，于是 $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=\int\frac{a\sec^2 t}{a\sec t}=\int\sec tdt$ 利用积分公式可得 $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=\ln|\sec t+\tan t|+C$．

根据三角函数线，有 $\sec t=\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a}$，$\tan t=\frac{x}{a}$ 且 $\sec t+\tan t>0$．

因此$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=\ln(\frac{x}{a}+\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a})+C$.

分析：这道题的关键是$\sqrt{x^2+a^2}$根式的处理，借助三角函数线之间的关系$1+\tan^2 t=\sec^2 t$，提供解题思路，根式问题得到化简，进而求得定积分.

例4 求$\int\csc xdx$

解：$\int\csc xdx=\int\frac{dx}{\sin x}=\int\frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}$

$=\int\frac{d\frac{x}{2}}{\tan\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}=\int\frac{d\left(\tan\frac{x}{2}\right)}{\tan\frac{x}{2}}=\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+c$ 因为利用三角函数线：$\tan\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{\sin x}$，$\frac{1-\cos x}{\sin x}=\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{\cot x}$，即$\tan\frac{x}{2}=\csc x-\cot x$；所以上述不定积分可以表示为$\int\csc xdx=\ln\left|\csc x-\cot x\right|+C$.

分析：这道题直接求出余割函数的原函数存在困难，而通过余割函数与余弦函数的关系出发，把不熟悉函数逐步转化成数系的函数并且本题的关键是$\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|$的化简，因为我们目的是求$\csc x$的所有原函数，牢记半角的正切公式为我们求余割函数积分提供了思路。

例5 求有理函数$\int\frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}dx$.

解：有三角函数可知，正弦函数$\sin x$和余弦函数$\cos x$都可以用前面所提到的半角的正切表示，即$\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=\frac{2\tan\frac{x}{2}}{\sec^2\frac{x}{2}}=\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$

$\cos x=\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}=\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{\sec^2\frac{x}{2}}=\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$ 如果作变换可设$u=\tan\frac{x}{2}$（$-\pi<x<\pi$），那么$\sin x=\frac{2u}{1+u^2}$，$\cos x=\frac{1-u^2}{1+u^2}$；而此时$x=2\arctan u$，从而$dx=\frac{2}{1+u^2}du$；于是$\int\frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}dx=\frac{1}{2}\int\left(u+2+\frac{1}{u}\right)du$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{u^2}{2}+2u+\ln|u|\right)+C=\frac{1}{4}\tan^2\frac{x}{2}+\tan\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C$.

分析：这道题用积分表无法直接求出积分，因此用变量替换是$u=\tan\frac{x}{2}$，解本题关键因为利用三角函数线：$\sin\alpha=\frac{MP}{OP}=\frac{\sin\alpha}{1}=\frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}$ $\cos\alpha=\frac{OM}{OP}=\frac{\cos\alpha}{1}=\frac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}$ 把繁琐分式转化成了可化为有理函数的积分。

（四）定积分中的应用[2]

例6计算$\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}dx\,(a>0)$.

解：利用三角函数线性质由：

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，可设$x=a\sin t$，则$dx=a\cos tdt$，当$x=0$的时候，取t＝0；

当$x=a$的时候，取$t=\frac{\pi}{2}$。

因此$\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}dx=a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 tdt$

$=\frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)dt=\frac{a^2}{2}\left[t+\frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi a^2}{4}$。

分析：这道题的关键是$\sqrt{a^2-x^2}$根式的处理，借助三角函数线之间的关系$\sin^2 t+\cos^2 t=1$，提供解题思路，根式问题得到化简，进而求得定积分。

可见扎实的三角函数线知识基础在解决高等数学问题中起着至关重要的作用。无论是不积分的学习还是定积分的学习的教学过程中，第一类积分的学习较为容易，但是在第二类换元法的学习比较困难，甚至难以理解，例如在第二类换元法积分学习中求$\sqrt{x^2+a^2}$、$\sqrt{x^2-a^2}$、$\sqrt{a^2-x^2}$类积分，困难在于有根式，用直接积分法或第一类换元法积分法无法直接求出此类积分，先运用“三角函数线的关系”换元，再去根式.最后使用第一类换元积分法求积分，第二类定积分问题就得到解决.

结语

虽然高中数学必修教材中根据课程《标准（2017年版）》中的要求删除正弦线、余弦线、张切线但是三角函数线本身是三角函数的图形化表示，相当于我们从几何的角度看待三角函数值，看得见、摸得着，接地气，符合底层认知规律。高中数学中用途就更为广泛：三角函数诱导公式的推导、利用三角函数线比较三角函数的大小、利用三角函数线解三角函数不等式、利用三角函数线证明三角恒等式。

在高等数学里借助三件函数线的几何直观性构建三角函数线的之间的基本关系和相关的推导公式在高等数学解题时恰当的运用能够做到事半功倍的效果，三角函数线知识在第一类极限证明、验证柯西中值定理和第二类换元积分的求解中的应用，建立了初等数学与高等数学相关内容学习之间的桥梁，探究初等数学知识在高等数学中的应用，能够帮助学生更好地建构数学知识体系。

参考文献

[1]中学数学课程研究开发中心.普通高中课程标准实验教科书数学（必修4）[M]北京：人民教育出版社.2007.

[2]同济大学数学系.高等数学（第七版上册）[M].北京：高等教育出版社.2014.

作者简介：1.布威麦尔耶姆·艾力（1993-），女，新疆喀什人，助教，硕士研究生，研究方向：数学教育。

通讯作者简介：2.张全全（1993-），男，甘肃武山人助教，硕士研究生，研究方向：数学教育。

基金项目：2021年度昌吉学院教科研项目《义务教育数学课程标准（2021年版）》下小学数 学课程的变化趋势的研究（项目编号：21KY010）