

# 基于直观想象素养培养的数学教学设计

## ——以“二面角及其平面角”为例

张晓慧

湖南科技大学

**摘要:** 直观想象素养是数学核心素养的重要组成部分, 数学教学必须有意地创设条件培养几何直观和空间想象的能力。本文以“二面角及其平面角”教学为例, 通过对“二面角及其平面角”的教学设计及其分析, 认为教师在培育学生的直观想象素养时要做到: 创设数学情境, 提升学生的观察力; 利用直观模型进行教学, 培育直观想象素养。

**关键词:** 直观想象; 二面角及其平面角; 教学设计

【DOI】10.12252/j.issn.2096-6288.2022.11.159

### 一、直观想象素养的内涵

《普通高中数学课程标准(2017年版)》提出了六大数学学科核心素养, 其中直观想象素养是指借助几何直观和空间想象感知事物的形态与变化, 利用空间形式理解和解决数学问题<sup>[1]</sup>。就数学学科而言, 数与形是数学研究和学习的基本对象, 利用数形结合的思想, 建立数、形的联系, 可以寻求问题的解决思路; 利用几何图形描述问题能够将研究问题图形化; 借助几何直观理解问题, 可以把复杂的数学问题变得简单、形象; 借助空间想象能力来认识事物, 能把握不同事物之间的联系。直观想象是数学核心素养的重要内容, 而立体几何是提升直观想象核心素养的重要载体, 课堂教学是核心素养落实的主要环节。在数学教学过程中, 教师要有意识地为学生创设发展直观想象的情境, 帮助学生提升数形结合的思维, 发展几何直观与空间想象的能力, 进而内化为直观想象素养。具备良好的直观想象素养, 不仅能够让学生更好地理解数学, 增强运用直观想象思考问题的意识, 更能培育在情境中感悟事物本质的能力。

### 二、基于直观素养培育的教学分析

本文以人教A版必修二第八章立体几何初步中的“二面角及其平面角”课堂教学为例, 探究如何基于培养学生的直观想象素养进行教学。

从学生的认知基础看, 他们已经进行了平面角的学习, 并对其静态定义与动态定义都较为熟悉, 有了一定的知识储备。同时, 在此之前, 学生已经研究过两条直线的垂直定义、线线角的定义、线面角的定义, 熟悉线线、线面平行与垂直关系的判定和性质以及面与面平行的判定和性质, 能够较熟练地运用定理对位置关系进行判定和相关性质进行研究与论证。至此, 学生已经掌握了一定的空间想象力和概括能力, 积累了利用图形描述问题、分析数学问题的基本方法。在本节课的学习中, 可以类比平面角的学习过程, 观察模型并概括其特点,

类比平面角的定义学习二面角的定义及表示方式, 从图形语言到文字语言再到符号语言, 由此抽象出二面角的定义。通过二面角的学习, 借助空间形式认识其位置关系, 形态变化和运动规律, 可以培养学生的抽象思维能力和直观想象素养。

从学生的思维发展角度来说, 本阶段学生的思维能力正由形象经验型转向抽象理论型, 能够运用假设、推理来思考和解决问题。在二面角及其平面角的教学, 如何将直观想象素养渗透在教学的环节中, 提升学生的几何直观和空间想象能力, 这是值得教师进行思考和研究的问题。教材中以回顾直线与平面垂直、直线与直线垂直的定义过程为导入, 引导学生思考角的关键作用。在平面几何中, 先定义角, 再利用角刻画两条相交直线的位置关系, 进而研究直线与直线相互垂直这种特殊情况。类似的, 研究两个平面间的位置关系, 也需一个角, 由此引出二面角的学习。至此已初步调动学生思维, 将新知与旧知联系, 使学生获得两个面所夹的角就是二面角这种直观感受, 但这种直观感受与严格的数学符号语言之前还存在一定距离, 教师的任务就是要帮助学生拨云见日, 消除这段距离, 实现从模型抽象出图形语言, 再由图形语言概述文字语言, 最后归纳整理为符号语言。这一过程, 可以促进学生几何直观能力和空间想象能力的发展, 提高学生发现问题、分析问题并解决问题的能力, 促进几何直观素养的形成。

### 三、基于直观素养培育的教学设计

#### 1. 新知导入, 建构起点

引言: 上节课, 我们学习了空间直线与平面垂直的内容, 研究了直线与直线垂直和直线与平面垂直之间的联系与转化, 请大家回顾直线与直线垂直、直线与平面垂直的定义过程。

师生活动: 引导学生回顾。

师: 那本节课我们一起学习另一个垂直关系——平

面与平面垂直。

设计意图：回顾平面内直线垂直的定义，使学生能通过类比找到研究平面与平面垂直的思维过程，渗透数学研究的一般思路，培育学生养成前后一致、逻辑连贯地思考问题的良好习惯。

问题1：将一条直线沿直线上一点折起，得到的平面图形是？

追问：一个点将直线分为两段射线，有公共端点的两条射线组成的图形叫做角，这是角的静态定义，由此定义，这个平面角如何表示？角的取值范围是？有哪些特殊的角度吗？此时两条射线对应的位置关系是怎样的？

设计意图：在老师的引导下回顾旧知——平面角的静态定义，唤醒思维，帮助学生进行新旧知识的链接，感悟几何知识从平面到空间的整体性和连贯性，建立结构认识。

### 2. 探究新知，初步理解

师：用纸张折叠演示，将平面沿平面上的一条直线折起，这条直线将平面分为两个部分，得到了一个空间图形，在两个半张A4纸之中，存在一个张口。

问题2：这个空间图形由哪些部分组成？在教师的翻折过程中，你感受到了什么变化吗？

追问：当纸没有闭合时，同学们从不同角度观察，能发现什么吗？

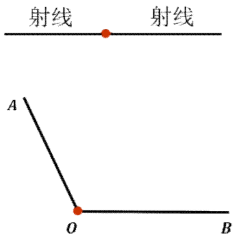
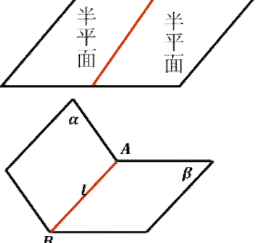
设计意图：类比直线翻折，得到角的概念，引出二面角的概念。通过教师创设的情境引导学生关注本课的知识内容。在纸的翻折的过程中，最易观察到的就是纸的张口发生了变化，因此可以以此为关键点，对纸的张口大小变化这一现象进行提炼，有学生提出翻折后纸张张口像一个角时，要抓住这个信息，加以引导，把纸的“张口”这一非数学语言转化为数学语言，通过具体情境引导学生逐步深入知识点的学习，利用直观想象素养理解二面角的概念。

问题3：同学们，请观察纸张张口形成的“角”，你能发现它与之前学习的角有什么不同吗？

师生活动：教师引导学生通过图形、表格等形式将平面几何中“角”的概念与二面角对比，引出与二面角有关的概念：半平面、二面角的棱、二面角的面以及二面角的表示方法。

设计意图：通过类比平面角概念，发现平面角与二面角的异同。平面角是由两条射线及其一个交点组成的，而二面角则是由两个半平面和一条公共直线组成的；直线上一点可以将这条直线分割为两条射线，而平面则被一条直线分割为两个半平面。通过以上类比，可以清晰地获得二面角的定义及表示方法。

表1 角与二面角的对比

名称	角	二面角
图形		
定义	从平面内一点出发的两条射线（半直线）所组成的图形	从空间一条直线出发的两个半平面所组成的图形
构成	点O→顶点，射线OA，OB→边	直线l→棱，半平面α、β→二面角的面
表示	记为： $\angle AOB$	记为：二面角 $\alpha-l-\beta$ ，二面角 $\alpha-AB-\beta$

问题4：请同学们找一找生活中出现的二面角模型？

师生活动：学生积极寻找生活中常见的二面角模型，教师加以引导和点评，加深对二面角的理解。

设计意图：让学生从熟悉的生活中寻找二面角的模型，加强数学知识与实际的联系，明白数学蕴含在生活之中，帮助学生从直观感知到数学抽象生成概念。

### 3. 深入探究，升华理解

师生活动：教师继续使用二面角模型，变化两个半平面的位置，感受二面角模型张口的变化。同桌二人两两为一组，利用数学书构造二面角模型，改变半平面的位置，反复观察翻书的过程，观察二面角发生变化时，模型中各元素的情况，能不能从数学的角度刻画。

问题5：同学们能从数学的角度刻画咱们数学书二面角模型的变化吗？

设计意图：认识往往逐步深入的过程，教师通过折纸张口引入二面角，结合探究过程，引导学生对核心问题的明朗与聚焦，即刻画二面角的大小，从而促进学生深入思考。通过思考，初步理解二面角的平面角的概念。

问题6：在日常生活中，我们常常说“将门开大一些”，是指哪一个角？

追问：这个平面角的顶底该取在那里？角的两边又该怎么取？

师生活动：教师动手操作，演示将门与墙面所成的角逐渐变大，类比平面角的定义和直线与平面所成角的定义，知道刻画所选角必须满足“存在性”和“唯一性”，最后归纳得出二面角的平面角必须具备如下3个条件：角的顶点须在棱上；角的两边分别在两个半平面内；角的两边分别与棱垂直。

在此基础上，学生阅读教材，掌握二面角平面角的

定义。

问题7：二面角的平面角大小与顶点 $O$ 的位置是否有关？

师生活动：学生联系已有的知识经验，利用等角定理进行论述举证，深化知识的理解。

设计意图：用类比的思想方法，并且联系生活实际，从生活中观察数学，并用等角定理证明二面角平面角的大小与点 $O$ 在棱上的位置无关，进一步体会平面角的唯一性，理解二面角平面角定义的合理性，为后面从复杂几何体中准确找平面角做好理论铺垫。

问题8：能否用不垂直直线的两射线来刻画二面角的大小？换言之，用与棱不垂直的两条射线能否定义二面角的平面角呢？

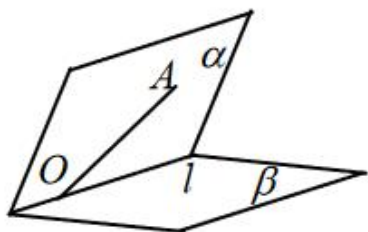


图1 二面角模型图

师：请大家用你们的模型摆一摆，如图1所示，在二面角 $\alpha-l-\beta$ 的棱 $l$ 上取一点 $O$ ，一支笔经过点 $O$ 紧贴面 $\alpha$ ，记为射线 $OA$ ，考查射线 $OA$ 与面 $\beta$ 所成的角。能作出多少个线面角？为什么？

追问：请思考，为什么要用与棱垂直的两条射线来定义二面角的平面角呢？

设计意图：刻画二面角的大小是教学中的难点，学生在参与探讨刻画二面角大小方法的过程中，共同探究，共同讨论，这样既发挥了学生学习的主体作用，又利于学生自我反思意识的形成和创新思维的培养。经由师生共同研讨，学生不但学会了二面角的定义和二面角的度量方法，而且体会了数学的严谨性。

问题9：在反复翻动书本的过程中，同学们是否发现了特殊的二面角？请交流并思考特殊二面角的特征。当纸闭合时，二面角的平面角大小是多少度？翻动书本，二面角的平面角大小如何变化？

追问：同学们能指出二面角的平面角为 $0^\circ$ 、 $90^\circ$ 、 $180^\circ$ 时纸张变化情况吗？二面角的平面角 $\alpha$ 的范围是？

师生活动：观察翻动的书本，我们找到，当两个半平面重合时，平面角的大小为 $0^\circ$ ；当两个半平面合成一个平面时，平面角的大小为 $180^\circ$ 。得到二面角的平面角 $\alpha$ 的范围时 $[0^\circ, 180^\circ]$ 。

其后是有关习题演练、课堂小结等的设计，略。

#### 四、基于直观素养培育的教学反思

#### 1. 创设数学情境，提升观察能力

观察力是基本的智力品质之一，良好的观察力为创造性思维的发展提供不竭动力。同时，对于发展直观想象力而言，学生的观察力也显得尤为关键。而学习是一个主动的过程，学生积极参与课堂的前提是要对数学持有兴趣，具有学习数学的内在动机。高中阶段的数学学习，学生普遍感到困难，严重脱离实际生活的应用题，让学生感到恐惧；复杂的题意和大量的数学运算，并没有真正让数学走进生活，没有让学生感到生活中充满丰富多彩的数学，反而极大的降低了他们学习数学的动力<sup>[2]</sup>。因此，想要提高学生数学学习的内在动机，教师要在数学教学中创设合适有趣的情境，激发学生的学习兴趣，通过引入具有探索性的情境，鼓励学生观察、分析和解决问题，在课堂中留给学生思考的空间，从而培养出敏锐的观察力。例如，在立体几何初步该章节的知识中，蕴含着与学生实际生活相关的实例，在直线与平面垂直一节中，旗杆垂直地面便是一个具体的实例，在授课时生动形象地引入该实例，创设对应的数学情境，探究直线与平面垂直的判定，可以由此将生活中的模型与数学中的概念紧密结合，既培养了学生观察事物的能力，也提高了辨别事物本质的关键能力。

#### 2. 利用直观模型，培育直观想象

高中数学知识比以往的数学知识更为抽象，直接理解难度较大，不易掌握。因此在数学教学中，数学模型发挥着至关重要的作用，它能够帮助学生更好地理解抽象的数学概念并拓展直观想象的能力。通过使用模型和可视化工具，教师可以将数学理论具体化，将抽象的数学概念转化为可视化的形式，学生能够更容易地理解和掌握。例如，利用信息技术绘制几何图形，学生可以直观地理解各种几何原理，而使用图形和曲线来解释函数和方程可以让学生更容易地看到数学关系。这种直观的方法可以唤醒学生学习的兴趣，提高数学能力，同时也帮助他们在解决实际问题时更好地将知识与实践联系起来，应用数学知识分析问题、解决问题。因此，数学模型在教育中的应用不仅有助于学生的学习，还可以培养他们的直观想象力，为未来学习中的数学和科学研究打下坚实的基础。

#### 参考文献

[1] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017年版) [M]. 北京: 人民教育出版社, 2018: 6.  
 [2] 吴彤. 数学抽象重在探究发现——以“两平面垂直”为例[J]. 数学通报, 2018, 57(12): 22-24+29.  
 [3] 胡云飞. 基于提升直观想象素养的立体几何法则课的设计与反思——以《直线与平面垂直》为例[J]. 数学通报, 2016, 55(12): 24-26+31.