新课标新教材下圆锥曲线综合问题——定点问题的教学分析与实践

李莞欣
中央民族大学附属中学

摘　要：通过新课标以及新教材下一轮复习圆锥曲线综合问题——定点问题的教学分析与实践，来探索如何实现新课标要求的高中阶段数学学科核心素养：会用数学眼光观察世界；会用数学思维思考世界；会用数学语言表达世界。本文从定点问题的教学背景、内容分析和设计逻辑、学习者分析、实例选择和进阶思考，作业设计；在这个过程中通过从特殊到一般的方法解决定点问题；体会用降维转化、数字特征与几何特点相联系、函数结合方程等数学思想来求解问题的方法，学会用代数求解的方法来解决几何问题，感受坐标、方程思想在研究几何问题中的作用。在这个过程中，体会数学发现和创造的历程，能够发现问题、提出问题、分析问题以及解决问题，体会数形结合和方程思想，培养数学抽象和数学运算、专研与合作交流的核心素养。

关键词：数学核心素养；教学分析；教学实践
【DOI】10.12252/j.issn.2096-6288.2023.02.134

一、背景

在2017年最新版普通高中数学课程标准中，将数学学科核心素养解释为“无论接受教育的人将来是否从事与教学相关或者数学相关的工作，学生能够用数学的眼光去观察世界，用数学思维去思考生活中遇到的问题以及认识世界，最终能够用数学语言去表达自己的观点和看法。通过数学学习，培养数学相关思维品质、培养学生逐渐拥有用数学方法解决问题的关键能力以及培养学生的情感、态度与价值观。通过高中阶段数学教学，除了完成教学目标，培养学生“三会”是更重要且意义深远的目标。”

二、教学内容分析

该单元内容为人教B版选择性必修第一册中平面解析几何的内容，通过本章内容的学习，建立学生从多个角度来看圆锥曲线的思想，首先结合立体几何中圆锥的截面，发现椭圆、双曲线和抛物线都可以由平面截两个圆锥得到。另外，学生通过椭圆和双曲线的定义可以很容易发现这两者的关联，而如果将椭圆的第二定义和抛物线的定义相结合，会发现圆锥曲线的方程都满足与定点和定直线的距离比是常数e的点的集合或者轨迹。在解决圆锥曲线综合问题的时候，通常会研究圆锥曲线与直线的位置关系，进一步研究最值范围问题、定点定直线的问题、证明和探索问题。这里面的核心逻辑为如何用代数语言表达几何特征，进而利用代数求解来研究几何元素之间的关系。

解析几何的核心逻辑就是选择合适的代数求解方法研究几何相关问题，其中最主要的是如何进行几何关系的代数转化，基本思想为数学结合思想，核心方法是坐标法，在大单元学习内容“平面解析几何初步”这一章中，其知识逻辑主线就是用代数方法研究圆锥曲线结合直线的几何性质，要求学生通过建系的方法研究直线、圆、圆锥曲线、圆锥曲线与直线结合的代数方程，通过方程思想研究它们的几何特征及其相互位置关系；通过平面解析几何这章研究问题的方法，体会“数”与“形”相互转化之美。

本节的教学内容包含椭圆、双曲线、抛物线的定义性质和直线与圆锥曲线的位置关系；圆锥曲线中的最值范围问题、定点定直线的问题、证明和探索问题。其中蕴含的数学思想方法：函数与方程思想，函数思想是运用运动和变化的观点分析和研究其中的数量关系，建立函数关系或者构造函数，运用函数的图像和性质去分析问题转化问题解决问题；方程思想就是分析其中的变量间的等量关系，建立方程或方程组，通过解方程和方程组，运用方程的性质去分析解决问题；

数形结合思想；分类整合思想：将复杂的圆锥曲线问题进行分解成若干个基础性问题，通过对基础性问题的解答来实现原问题的解决。而分类讨论需要明确分类的对象；转化划归思想；从特殊到一般，从一般到特殊在这个过程中实现会用数学思维思考世界的要求，并能够将生活实际问题转化为数学问题，最终达到会用数学语言表达世界的目标。

三、学习者分析

学生已经完成了直线方程、直线与直线间位置关系、点到直线间距离公式、圆的标准方程和一般方程、点与圆的位置关系的学习；基本掌握了直线方程的建立以及给点、斜率求方程的方法；学会利用两条直线的斜率的关系判断直线间的位置关系，会求两条直线的交点坐标；初步掌握了给一点和一条直线，求该点到直线的

距离公式；掌握了给定圆心和半径建立圆的标准方程和通过标准方程求圆心和半径的方法；掌握了圆标准方程和一般方程的互相转化。

现阶段学生计算能力偏弱：例如联立方程组后计算易出错，在求点到直线间距离这类题上计算会出错，学生在写圆的方程时容易忘记对半径平方；基本概念不清：两条直线平行、相交的概念不清；知识转化的能力较薄弱：没有真正理解联立方程组后得到的解与点的关系，将两条直线间的位置关系转化到交点个数的思想方法；数形结合思想理解不够透彻，对于坐标与点的关系、方程与直线、圆的关系、方程组的解与点的关系理解不够深入。

对于学生而言，学习的兴趣与需求如下：学生喜欢人文艺术色彩较为浓厚的学科，由于数学的教学的理、抽象和逻辑性强的特征，易给学生枯燥和无聊的印象，因此增强数学的美感，与生活实际的联系，与艺术的联系会大大增加学生的学习兴趣；视频照片色彩浓厚的事物给学生的刺激会更大，如果将数学符号语言与图形紧密联系，也会增加学生学习兴趣；想要建立学生学习数学的兴趣，必须让学生有信心能够学懂，适当降低学习难度、减慢新课进行速度、增加习题和计算的重复次数会增强学生学习的信心，从而增强学生的学习兴趣；如果学习到的理论知识可以适当的应用于生活实践，给予数学知识以实用价值，满足了学生可以用知识解决实际问题的需求同时可以增加学生学习这部分内容的兴趣。

在本节内容的学习上，学生可能障碍点有：圆锥曲线综合问题中，在解决圆锥曲线和直线相关问题，求解出点的坐标表示，如何化简，尤其当形式比较复杂的时候，如何进行进一步转化。

四、实例选择

例1：已知椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（a>b>0）的离心率为$\frac{\sqrt{2}}{2}$，短轴的一个端点为M（0，1），直线l：$y=kx-\frac{1}{3}$与椭圆相交于不同的两点A，B.

（1）若|AB|＝$\frac{4\sqrt{26}}{9}$，求k的值；

（2）求证：不论k取何值，以AB为直径的圆恒过点M.

证：（2）若以AB为直径的圆恒过M，则$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$

学生需要完成下面三项活动：首先通过离心率和短轴端点坐标求出椭圆方程，接下来利用弦长公式求出直线的斜率，其中第一问的过程中化简整理是需要一定时间的，学生需要通过合理的方法借助因式分解将k的值求出。而在第二问中需要把以AB为直径的圆恒过点M.这个条件转化为判断向量AM、BM的数量积为0。在这个过程中，学生需要突破的难点有：如何利用离心率找到椭圆中a、b、c的关系；在联立直线和椭圆方程的时候如何进行合理化简；如何利用韦达定理表示出弦长公式；垂直关系如何证明（思考为何不使用斜率乘积为-1）。

设计目的：这道题需要求证的定点为题干中已知坐标的点，根据以AB为直径的圆恒过点M（0，1），即证三角性ABM为直角三角形，即证向量AM、BM的数量积为0。

例2：（改编全国1卷）已知A，B分别为椭圆E：$E\colon\frac{x^2}{a^2}+y^2=1$（a>1）的左、右顶点，G为E的上顶点，$\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{GB}=8$. P为直线x＝6上的动点，PA与E的另一交点为C，PB与E的另一交点为D.

（1）求E的方程；

（2）证明：直线CD过定点M$\left(\frac{3}{2},0\right)$.

（2）证：$\because P$为直线$x=6$上动点,设P（6,m）又$\because A$（-3,0）B（3,0）

$$\therefore l_{PA}:y=\frac{m}{9}(x+3)\text{，联立}\begin{cases}y=\frac{m}{9}(x+3)\\ \frac{x^2}{9}+y^2=1\end{cases}\therefore\left(m^2+9\right)x^2+6m^2x+9m^2-81=0$$

$$\text{设}C\ (x_c,y_c),\therefore x_c+x_A=-\frac{6m^2}{m^2+9},\text{又}\because x_A=-3\ \therefore x_C=-\frac{6m^2}{m^2+9}+3=\frac{-3m^2+27}{m^2+9}$$

$$\therefore y_C=\frac{m}{9}(x_C+3)=\frac{6m}{m^2+9}\ \therefore C\left(\frac{-3m^2+27}{m^2+9},\frac{6m}{m^2+9}\right)$$

$$\text{设}D\ (x_D,y_D),\therefore x_D+x_B=\frac{6m^2}{m^2+9},\text{又}\because x_B=3\ \therefore x_D=\frac{6m^2}{m^2+1}-3=\frac{3m^2-3}{m^2+1}$$

$$\therefore y_D=\frac{m}{3}(x_D-3)=\frac{-2m}{m^2+9}\ \therefore D\left(\frac{3m^2-3}{m^2+1},\frac{-2m}{m^2+1}\right)$$

分类讨论：若直线CD的斜率不存在,即$x_C=x_D$

$\therefore x_C=x_D=\frac{3}{2}\ \therefore$直线$CD$一定过$M\left(\frac{3}{2},0\right)$

若直线CD的斜率存在,即证$k_{CM}-k_{DM}=0$

学生需要完成下面活动：首先通过向量数量积的公式求出a的值，从而求得椭圆方程；接下来通过设P点的坐标，从而写出直线PA的表达式，通过联立，求出C、D的坐标表达，这其中需要讨论直线的斜率是否存在

例3：已知A，B分别为椭圆E：$\frac{x^2}{a^2}+y^2=1$（a>1）的左、右顶点，G为E的上顶点，$\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{GB}=8$. P为直线x＝6上的动点，PA与E的另一交点为C，PB与E的另一交点为D.

（1）求E的方程；

（2）证明：直线CD过定点

在解决该题的第二问时，可以先通过特殊情况把定

点坐标求出，再证过定点的问题。

设计目的：证直线CD过M，即证三点共线，利用直线的斜率，证明直线CM的斜率与DM直线斜率相同；通过这道题提醒学生，直线的斜率如果在设的时候一定考虑有不存在的可能性。

例4：已知椭圆C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（a＞b＞0）的一个顶点为P（0，1），离心率为$\frac{\sqrt{2}}{2}$.

（1）求椭圆C的方程；

（2）过点P作斜率为k_1的直线l_1交椭圆C于另一点A，过点P作斜率为k_2（$k_2 \neq k_1$）的直线l_2交椭圆C于另一点B.若$k_1k_2=1$，求证：直线AB经过定点.

设计目的：练习通过先求再证的方法解决定点问题。

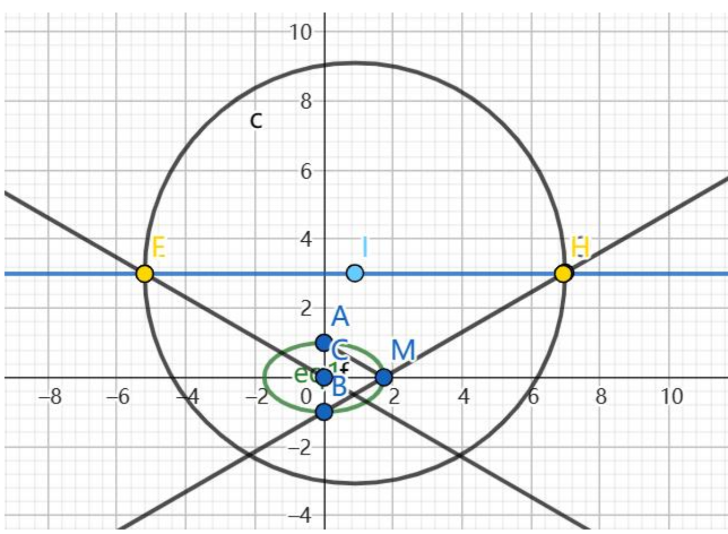
五、进阶思考

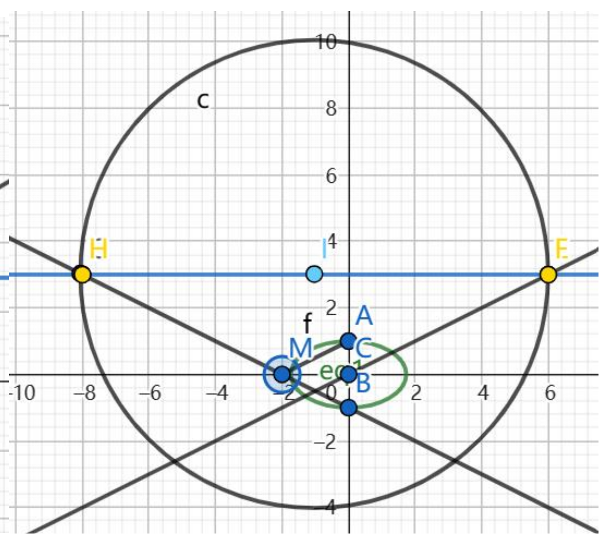
例：已知椭圆C的短轴的两个端点分别为A（0，1），B（0，－1），离心率为$\frac{\sqrt{6}}{3}$.

（1）求椭圆C的方程及焦点的坐标；

（2）若点M为椭圆C上异于A，B的任意一点，过原点且与直线MA平行的直线与直线y＝3交于点P，直线MB与直线y＝3交于点Q，试判断以线段PQ为直径的圆是否过定点？若过定点，求出定点的坐标；若不过定点，请说明理由.

对于该题，如果依然想用先求再证的方法，就需要先用特殊情况把定点位置确定，设$M(\sqrt{3},0)$，求得圆如图所示：





设$M'(-\sqrt{3},0)$，求得圆如图所示：

通过该题的分析，观察以PQ为直径的圆，这两个圆关于y轴对称，所以圆过的定点只能为y轴上的点，所以设定点坐标的时候可以设为（0，b）。

设计目的：圆锥曲线综合问题对于学生的计算能力、逻辑分析能力、数形结合、转化、函数、方程等数学思想都提出了非常高的要求。方法和技巧的掌握都需要足够的练习和归纳总结，因此必须留给学生足够的时间。通过定时作业训练，巩固该阶段相关知识点的落实，体会用数形结合、转化、函数、方程等数学思想来解决数学问题的方法，学会用代数方法解决几何问题的能力，感受坐标、方程在研究几何问题中的作用。

六、总结

通过设置问题串，串联起圆锥曲线综合问题中关于定点问题的解决思路，逐步打通学生解决定点问题的几个关键点。通过层层递进的方式，根据动点或者动线的特殊情况求出定点，再证明定点与变量无关。在这个过程中通过从特殊到一般的方法解决定点问题；体会用数形结合、转化、函数、方程等数学思想来求解问题的方法，学会用代数方法解决几何问题的能力，感受坐标、方程在研究几何问题中的作用。通过不同形式的自主学习和探究活动，体会数学发现和创造的历程，能够发现问题、提出问题、分析问题以及解决问题，体会数形结合和方程思想，培养数学抽象和数学运算、专研与合作交流的核心素养。

参考文献

[1]郝文华.“大单元”背景下高中数学阅读教学初探——以新教材“复数”一章内容为例[J].数学通讯，2022，No.892（23）：8-10.