初中数学基于规律的分式化简求值技巧总结

吴艾迪

江苏省宿豫区实验初中

摘　要：苏教版初中数学课程内容体系中的分式化简是属于一类典型且重要的问题之一，属于中考数学必考题型。为快速准确完成试题，学生必须全面且熟练地掌握分式化简求值的解题技巧，灵活运用。分式化简求值问题中，一类基于找规律的问题需要学生自主探索规律，并进行使用，属于比较灵活的问题。文章总结了初中数学分式化简求值的基本技巧，然后结合教学案例和教学经验，针对找规律的分式化简求值问题进行做题技巧的总结，帮助教师优化找规律分式化简求值问题技巧教学，培养学生解题能力。

关键词：苏教版；初中数学；分式化简求值；找规律

【DOI】10.12252/j.issn.2096-6288.2023.02.006

引言

初中数学的分式化简求值板块是初中数学比较重要的教学内容之一，根据苏教版初中数学课程体系，该板块为初二年级一个核心章节，该章节的设计符合《义务教育数学课程标准（2022年版）》对于数学教学的基本要求，即通过整式、分式等代数模块，培养学生运算和推理的能力。分式化简求值存在大量的运算技巧，对于运算技巧的理解和掌握程度决定了学生在课程考试中的做题速度和准确率。在分式化简技巧中，基于找规律的分式化简技巧需要根据已知分式探索出分式化简的规律，然后利用所得的规律进行求值和拓展应用。这类问题中，若没有准确找到规律，则导致整体失分。基于此，本文首先总结分式化简的常用技巧，然后针对找规律的问题进行案例分析和总结，帮助教师及同学更加系统地学习和掌握分式化简求值的技巧。

一、初中数学分式化简常用技巧

初中数学分式化简的基本知识包括分式的基本性质、分式的基本运算（加减乘除）、分式方程。分式的化简求值方法即是在此基础之上总结的，主要包括：性质法、倒数法、公式法、平方法、降幂法、设参法、因式分解法、整体带入法、顺次相加法、裂项相消法、方程（组）法。

具体而言，性质法是最为基本的方法，化简过程中通过对分式的分子分母同时同分和约分来达到化简的目的；倒数法是对已有的分式取倒数，通过倒数推进化简，实现求值；公式法是基于基本的平方和公式、平方差公式、三次方和展开等公式，如 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ ，$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$ ，$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$ 对已有分式进行变形和化简，通常可以实现整体消除和带入的效果；平方法是指当代求的分式自身存在某些“平方”关系时，可以通过对分式进行平方、三次方、开平方等处理的方法实现分式化简，可以看出，该方法属于性质法中一类特殊情况；降幂法是针对分式中一些幂次较高的未知数，为降低运算难度，先将高次幂的未知数用第次幂代替，达到化简得目的；设参法是针对分式中存在比例式或者连等关系的分式，在化简前，设置一个新的参数，用于整体化简辅助计算；因式分解法是通过因式分解，将分子分母中存在相同或者相关联的代数式进行分解，包括提取公因式、判断迁移运用的可能性、分组运算，该方法运算起来通常较为复杂，必须准确提出关联公因式；整体代入法是指将已知条件的分式作为一个整体，将其带入需要被化简得分式中，达到整体化简的目的，这种方法需要首先将整体分式进行恒等变形，找到整体带入的连接点，实现分式整体化简；顺次相加法主要针对一类多项相加（相减）的分式化简求值问题，该分式通过顺序做加法或减法，可将分式化为最简形式，然后再基于最简形式进行转化和求值；裂项相消法是指化简一类比较

复杂的分式时，将其拆解为多个分式相加或相减的形式，通过相互抵消，消除中间项，从而降低分式运算量，如$\frac{1}{(a+n)(a+n+1)}=\frac{1}{a+n}-\frac{1}{a+n+1}$；方程（组）法主要是针对已知条件中涉及多个未知数的分式化简问题，可以先通过求解方程，建立方程的解与分式之间的联系，通过相互表示和替代，最终实现分式的化简。

上述11中主要的分式化简技巧针对11类主要的问题，在解决具体问题时，不仅需要分类分析，“对号入座”，还要注意分式化简问题之间的联系和转化，从而灵活运用化简技巧，快速准确完成化简。另外，在教学过程中，应着重强调做题的切入点，确定分式化简求值属于哪一类问题，然后匹配对应的方法，是解决化简问题的关键。

二、基于找规律的分式化简案例分析

案例1：观察下列分式，找出规律，并完成计算。

$$\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}=\frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2})^2-1^2}=\sqrt{2}-1$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2}$$
$$=\sqrt{3}-\sqrt{2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{(\sqrt{4}+\sqrt{3})(\sqrt{4}-\sqrt{3})}=\frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{(\sqrt{4})^2-(\sqrt{3})^2}$$
$$=\sqrt{4}-\sqrt{3}$$

（1）运用上面的计算方法化简$\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$（n为正整数）

（2）利用上面的结论计算

$$\left(\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2021}+\sqrt{2022}}\right)$$
$$(1+\sqrt{2022})$$

（3）求值：$\frac{2}{1+\sqrt{3}}+\frac{3}{\sqrt{3}+\sqrt{6}}+\frac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{10}}$

解析：通过观察式子发现，三个式子都是利用平方差公式进行分母有理化，因此下面的题目也利用平方差公式进行分母有理化，然后再进行计算即可。

问题（1），通过已知的三个分式，利用性质法，进行化简，可得

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}$$
$$=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{(\sqrt{n+1})^2-\left(\sqrt{n}\right)^2}=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{(n+1)-n}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$$

问题（2），基于已经得出的规律，先对原式进行化简，即

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2021}+\sqrt{2022}}$$

$$=\sqrt{2}-1+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{4}-\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{2022}-\sqrt{2021}$$

所以，原式=

$$(\sqrt{2}-1+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{4}-\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{2022}-$$
$$\sqrt{2021})\times(1+\sqrt{2022})$$

$$=\left(\sqrt{2022}-1\right)\left(\sqrt{2022}+1\right)=\left(\sqrt{2022}\right)^2-1^2$$
$$=2022-1=2021$$

问题（3）计算一个相加的分式，可以看出给出的分式和已知分式并不完全相同，但结构相似，可以尝试利用已知的规律，利用平方差公式进行分母有理化。尝试后发现该分式可以进行同类转化。

$$原式\quad=\frac{2\left(\sqrt{3}-1\right)}{\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{3}-1\right)}+\frac{3\left(\sqrt{6}-\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{6}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{6}-\sqrt{3}\right)}$$
$$+\frac{4\left(\sqrt{10}-\sqrt{6}\right)}{\left(\sqrt{10}+\sqrt{6}\right)\left(\sqrt{10}-\sqrt{6}\right)}$$

$$=\sqrt{3}-1+\sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{10}-\sqrt{6}$$

$$=\sqrt{10}-1$$

小结：本题考查二次根式的分母有理化。通过观察给出的计算提炼出利用平方差法进行分母有理化是解题

的关键。

案例2：

$\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)=3$，$\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}=a\left(a\geq0\right)$，$\left(\sqrt{b}+1\right)\left(\sqrt{b}-1\right)=b-1\left(b\geq0\right)$，两个含有二次根式的代数式相乘，积不含有二次根式，我们称这两个代数式互为有理化因式。例如，$\sqrt{3}$ 和 $\sqrt{3}$、$\sqrt{2}+1$ 与 $\sqrt{2}-1$、$2\sqrt{3}+3\sqrt{5}$ 与 $2\sqrt{3}-3\sqrt{5}$ 等都是互为有理化因式。在进行二次根式计算时，利用有理化因式，可以化去分母中的根号。请完成下列问题：

（1）计算：①$\frac{1}{\sqrt{2}}=$______，②$\frac{1}{\sqrt{3}-1}=$______；

（2）计算：$\frac{1}{2-\sqrt{3}}-\frac{2}{\sqrt{3}-1}$；

（3）已知有理数 a、b 满足 $\frac{a}{\sqrt{3}+2}+\frac{2b}{\sqrt{3}-1}=2\sqrt{3}-1$，则 $a=$______，$b=$ ______.

解析：本题利用互为有理化因式（1）①分子、分母都乘以 $\sqrt{2}$ 即可；②分子、分母都乘以 $\left(\sqrt{3}+1\right)$；

（2）第一项分子、分母都乘以 $\left(2+\sqrt{3}\right)$，第二项分子、分母都乘以 $\left(\sqrt{3}+1\right)$，再计算即可；

（3）将等式左边分母有理化，得到 $\left(2a+b\right)+\sqrt{3}\left(b-a\right)=2\sqrt{3}-1$，根据a、b都是有理数，得到2a+b=-1，b-a=2，即可求出a=-1，b=1。

问题（1）：① $\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，故答案为：$\frac{\sqrt{2}}{2}$；

② $\frac{1}{\sqrt{3}-1}=\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)}{\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$，故答案为：$\frac{\sqrt{3}+1}{2}$；

问题（2）：

$$\frac{1}{2-\sqrt{3}}-\frac{2}{\sqrt{3}-1}=\frac{\left(2+\sqrt{3}\right)}{\left(2-\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)}-\frac{2\left(\sqrt{3}+1\right)}{\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)}=2+\sqrt{3}-\left(\sqrt{3}+1\right)=1；$$

问题（3）$\because\frac{a}{\sqrt{3}+2}+\frac{2b}{\sqrt{3}-1}=2\sqrt{3}-1$，

$\therefore\frac{\left(2-\sqrt{3}\right)a}{\left(\sqrt{3}+2\right)\left(2-\sqrt{3}\right)}+\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)\times2b}{\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)}=2\sqrt{3}-1$，

$\therefore\left(2-\sqrt{3}\right)a+\left(\sqrt{3}+1\right)b=2\sqrt{3}-1$，

$\therefore\left(2a+b\right)+\sqrt{3}\left(b-a\right)=2\sqrt{3}-1$，

∵a、b都是有理数，

∴2a+b=-1，b-a=2，

解得a=-1，b=1，

故答案为：-1，1。

小结：此题考查了分母有理化计算，计算过程中，必须掌握分母有理化的常用方法，即通过“公式法”实现根号去除，正确掌握各式子的有理化因式是解题的关键。

结语

根据多年的教学经验表明，针对初中数学的分式化简求值问题，强化技巧教学、基于规律的化简技巧等，可以显著调高教学质量，同时提高学生做题的速度和准确率。找规律属于一类重要的题型，需要学生自主探索和总结，并加以应用。所谓熟能生巧，所以准确得到习题中的规律，一定是基于大量多类型的题目练习得到的。而且，分式化简的技巧并不止于此，教师在教学过程中不仅要督促学生进行大量练习，还应积极在已有问题上进行变形和拓展，积累题库和常见错题案例，帮助学生内化知识，丰富技能。

参考文献

[1]陈晨.分式化简求值的常见技巧[J].初中数学教与学，2022（13）：31-32+30.

[2]顾燕平.分式化简求值的错例剖析及教学建议[J].初中数学教与学，2021（22）：32-34.