导数证明不等式恒成立问题的策略
——以北京高考题为例

李德俊
北京市延庆区教育科学研究中心

摘　要：在人教B版数学必修第一册2.2节《不等式及其性质》介绍证明不等式常用的方法：作差法、综合法、分析法及反证法，这里主要涉及分式不等式、整式不等式及无理不等式等不等式的证明，应用不等式的性质及对不等式进行等价变形或者通过配方、因式分解等方法进行解决，而在人教B版选择性比修三学习导数的应用时会遇到不等式的证明，利用导数证明不等式是高考中的一个热点问题，其方法多样、灵活性强、难度大。这类不等式与函数有着紧密的联系，需要利用函数的相关性质尤其是单调性来解决，在不等式证明的种种方法中，占有重要的一席之地。而有些函数的单调性不容易直接判断出来，在实际学习过程中会发现通过利用导数判断函数的单调性来证明不等式要简捷得多，所以导数在证明不等式中起着至关重要的作用，本文就应用导数证明不等式做出五个方面的归纳，介绍具体的思路与做法。

关键词：导数；证明；不等式
【DOI】10.12252/j.issn.2096-6288.2023.02.066

函数与导数是高中数学的核心模块，也是新高考解答题中必考的基本内容之一，在人教B版选择性必修第三册学习导数的应用时会遇到不等式的证明，利用导数证明不等式是高考中的一个热点问题，其方法多样、灵活性强、有些题目难度大，这类不等式与函数有着紧密的联系，需要利用函数的相关性质尤其是单调性来解决，在不等式证明的种种方法中，占有重要的一席之地.而有些函数的单调性不容易直接判断出来，所以导数在证明不等式中起着至关重要的作用.证明不等式充分体现了数学基础知识的交汇性与综合性，数学思想方法创新灵活多样性，导数作为一种数学工具，对于证明不等式问题更是一种具有创新性的应用[1]。在解决利用导数证明问题时学生之所以存在困难，究其原因是基本方法没有掌握，研究的目标函数不清楚，缺少化归与转化的数学思想，本文以一道北京高考题为例，希望能增强导数专题复习的效果.

一、双变量不等式恒成立问题

例1.已知函数 $f(x)=e^{x}\ln(1+x)$.

（I）求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程；

（II）设 $g(x)=f'(x)$ ，讨论函数 $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上的单调性；

（III）证明：对任意的 $s,t\in(0,+\infty)$ ，有 $f(s+t)>f(s)+f(t)$

本题第一问是考查的利用函数的切线问题，本质上是考查导数的几何意义，第二问是利用导数判断函数的单调性，需要对导函数继续求导，背景是函数的凸性，第三问是二元函数的不等式的证明，这种创新设问打破了常规，需要将二元问题转化为一元的问题去处理，考查学生将多元与一元，变量与常量的辩证思维能力，深层次的理解数学的本质，考查学生分析问题、解决问题的能力。

解法探析

解（I）由题意可求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程为 $y=x$

（II）因为 $f'(x)=e^{x}\left[\ln(1+x)+\dfrac{1}{1+x}\right]$，

所以

$$g(x)=e^{x}\left[\ln(1+x)+\frac{1}{1+x}\right],$$

$$g'(x)=e^{x}\left[\ln(1+x)+\frac{1+2x}{(1+x)^{2}}\right],$$

因为 $x\in[0,+\infty)$，所以 $\ln(x+1)\geq 0,\dfrac{1+2x}{(x+1)^{2}}>0$ ，

又因为 $e^{x}>0$ ，所以 $g'(x)>0$ ，所以函数 $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上为增函数.

（III）解法一：直接作差法

要证明对任意的 $s,t\in(0,+\infty)$ ，有 $f(s+t)>f(s)+f(t)$

只需证明 $f(s+t)-f(s)-f(t)>0$ 成立，

设 $h(s)=f(s+t)-f(s)-f(t)$ ，将 s 视为自变量， t 为参数，则 $h'(s)=f'(s+t)-f'(s)$

因为 $s,t\in(0,+\infty)$ ，所以 $s+t>s>0$ ，

由（II）知，函数 $f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 为增函数，所以 $f'(s+t)>f'(s)$，所以，$h'(s)>0$

所以 $h(s)$ 在 $(0,+\infty)$ 为增函数，所以 $h(s)>h(0)$，

即 $f(s+t)-f(s)-f(t)>f(t)-f(0)-f(t)=-f(0)$

因为 $f(0)=0$，所以 $f(s+t)-f(s)-f(t)>0$，

所以对任意的 $s,t\in(0,+\infty)$，有 $f(s+t)>f(s)+f(t)$ 成立.

解法二：构造函数法

要证明对任意的 $s,t\in(0,+\infty)$，有 $f(s+t)>f(s)+f(t)$，

只需证明 $f(s+t)-f(s)>f(t)$，因为 $f(0)=0$，

所以只需证明 $f(s+t)-f(s)>f(t)-f(0)$

设 $m(x)=f(x+t)-f(x)\,x$，$t\in(0,+\infty)$，则 $m'(x)=f'(x+t)-f'(x)$，

因为 $s,t\in(0,+\infty)$ 所以 $x+t>x>0$，由（II）知，函数 $f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 为增函数，

所以 $f'(x+t)>f'(x)$，即 $m'(x)>0$，所以 $m(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数，

因为 $s>0$，所以 $m(s)>m(0)$，即 $f(s+t)-f(s)>f(t)-f(0)$ 成立.

解题感悟：这道高考题的前两问比较常规，第三问考查不等式恒成立问题，涉及双变量的不等式证明，应该将其中的一个变量视为常数，解法一是采用作差法构造差函数，转化为差函数恒大于零，进而转化为求新函数的最值问题，再利用导数求解。解法二是直接构造新函数，转化为研究新函数的单调性问题，再利用导数求解。不论哪种做法，都应该与第二问的结论建立联系，所以解答题一定要关注每问之间的联系，关注前一问是否对下一问有提示，可以使得解题方向明确。

二、单变量不等式恒成立问题

例2（2013北京高考第18题）：设 l 为曲线 $C:f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ 在点（1，0）处的切线.

（I）求 l 的方程；

（II）证明：除切点（1，0）之外，曲线C在直线 l 的下方.

本题第一问考查了导数的几何意义及求切线方程，第二问证明不等式恒成立问题，需要学生进行由“形”到“数”的转化，转化为证明不等式恒成立，即证 $\dfrac{\ln x}{x}<x-1$，$(\forall x>0,\text{且}\,x\neq 1)$ 成立，考查了利用导数判断函数的单调性，考查学生的化归与转化思想，数形结合思想。

解法探析

解法一 ：构造差函数——利用不等式的性质直接作差

设 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}-x+1$ 得

$$f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}-1=\frac{1-x^2-\ln x}{x^2}(x>0).$$

令 $f'(x)=0$，$x=1$

当 $x\in(0,1),1-x^2>0,\ln x<0$，所以 $f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在（1，0）上是增函数；

当 $x\in(1,+\infty),1-x^2<0,\ln x>0$，所以 $f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在上是增函数；

当 x=1时，$f(x)=0$，因为 $x\uparrow 1$，所以 $\dfrac{\text{in}x}{x}<x-1$（$\forall x>0$，且 $x\uparrow 1$）成立，

即除切点（1,0）之外，曲线C在直线 l 的下方.

解题感悟：对函数 $f(x)$ 求导之后发现，决定 $f'(x)$ 的符号的是 $x^2-x+\ln x$，

可以转化为函数 $g(x)=1-x^2,h(x)=\ln x$ 函数图像交点的个数，由两个函数图像容易得到方程的根只有一个为1，在（0，1）时，函数 $y=\ln x$ 的图像在函数的 $y=1-x^2$ 下方，在 $(1,+\infty)$ 时，函数 $y=\ln x$ 在函数 $y=1-x^2$ 的上方，这样可以判断 $f'(x)$ 的符号。

所以在解题过程中，遇到不能直接求出导数的零点问题时，可以将决定导数符号的函数的零点问题转化为求两个新函数图像的交点问题。

解法二：构造二阶导函数——将决定导函数符号的函数视为新的目标函数来研究

设 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}-x+1$ 得 $f'(x)=\dfrac{1-x^2-\ln x}{x^2}(x>0)$

设 $g(x)=1-x^2-\ln x(x>0)$，则 $g(x)$ 与 $f'(x)$ 同号，

且 $g'(x)=-2x-\dfrac{1}{x}$

因为 $x>0$，所以 $g'(x)<0$，所以 $g(x)$ 在（$0,+\infty$）为减函数，因为 $g(1)=0$，即，$f'(1)=0$

当 $x\in(0,1)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 为增函数，当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 为减函数，当 $x=1$ 时，$f(x)_{\max}=0$ 时，所以 $f(x)\le 0$ 因为 $x\uparrow 1$，所以 $\dfrac{\text{in}x}{x}<x-1(\forall x>0$，且 $x\uparrow 1)$ 成立，即除切点（1，0）之外，曲线C在直线 l 的下方.

解题感悟：如果导函数不能因式分解，并且导函数的符号无法判断时，往往需要构造新函数采取二次

求导，即将 $f'(x)$ 视为一个新函数 $g(x)$，利用导数研究 $g(x)$ 的单调性，进而求出函数 $f'(x)$ 的零点，从而解决问题。

解法三：等价转化法——利用不等式的性质进行等价转化

要证：$\frac{\text{in}x}{x} < x-1(\forall x>0$，且 $x \uparrow 1)$ 成立，等价于证明 $\text{In}x \le x^2 - x(\forall x>0,$ 且 $x \uparrow 1)$ 成立，

即证 $\text{In}x - x^2 + x(\forall x>0,$ 且 $x \uparrow 1)$ 成立，

设 $g(x)=\ln x - x^2 + x(x>0)$，

$$g'(x)=\frac{1}{x}-2x+1=\frac{-(2x^2-x-1)}{x}=\frac{-(x-1)(2x+1)}{x}$$

$g'(x)=0$，则 $x=1$，或 $x=-\frac{1}{2}$（舍）

当 $x\in(0,1)$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 为增函数，当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$g^{'}(x)<0$，$g(x)$ 为减函数，

当 $x=1$ 时，$g(x)_{\max}=0$ 时，所以 $g(x)'' 0$，即 $\frac{\ln x}{x} \le x-1$ 成立

因为 $x \uparrow 1$，所以 $\frac{\text{in}x}{x} < x-1(\forall x>0$，且 $x \uparrow 1)$ 成立，即除切点（1，0）之外，曲线C在直线 l 的下方.

解题感悟：这种解法是关注新函数 $g(x)=\ln x - x^2+x$ 的解析式是由对数式与二次函数相加的结构构成，判断单调性时避免了二次求导。证明不等式恒成立问题时，可以先对不等式进行适当的变形后再构造新函数，构造的新函数最好满足两个条件，一是导函数简单，二是最值容易求。

解法四：放缩法——借助函数图像的切线函数

先画图猜想一下，因为函数 $y=\ln x$ 图像在点（1,0）处的切线方程为 $y=x-1$，所以 $y=\ln x$ 的图像除点（1,0）都在 $y=x-1$ 的下方，又因为直线 $y=x-1$ 与 $y=x^2-x$ 相切且位于其下方。

设 $g(x)=(x-1)-(x^2-x)(x>0)$

$g(x)=-x^2+2x-1=-(x-1)^2\le 0,$ 所以 $x-1\le x^2-x$，

由例1知 $\ln x \le x-1$

所以 $\ln x \le x-1 \le x^2-x$，所以 $\ln x \le x^2 - x$，即证 $\frac{\ln x}{x} \le x-1$ 成立，

因为 $x \uparrow 1$，所以 $\frac{\text{in}x}{x} < x-1(\forall x>0$，且 $x \uparrow 1)$ 成立，

即除切点（1，0）外，曲线C在直线 l 的下方.

解题感悟：证明不等式可以利用切线建构不等式，采用放缩法证明，如：函数 $y=\ln x$ 图像在点（1,0）处的切线方程为 $y=x-1$，即不等式 $\ln x \le x-1$ 恒成立；过原点且与函数 $y=\ln x$ 图像相切的切线方程为 $y=\frac{1}{e}x$，即不等式 $\ln x'' \frac{1}{e}x$ 恒成立。

三、方法规律，教学启示

通过两个高考真题作为例题总结北京高考中证明不等式恒成立问题，主要有两种不等式类型，一类为含单变量的不等式，一类为含单变量的不等式，无论是双变量还是单变量的不等式证明问题，最终都要转化为求含单变量的函数的最值问题，常用的三个方法：一是转化为求新函数的最值，构造新函数的途径有做差和作商；二是利用放缩法，常利用切线不等式，需要对常见函数的切线很熟悉；三是将不等式进行等价转化，再利用方法一解决。主要用到数形结合、分类讨论及化归与转化的数学思想。

本文中的高考题之所以经典，是其中蕴含的思想方法，能够使教师根据学生的思维水平的不同来调整自己的教学内容和选择恰当的解题方法，这样有针对性的教学才能提升不同层次的学生的思维能力. 本题的不同解法直接考查了导数的运算、求导法则、几何意义及利用导数判断函数的单调性等知识，间接考查了基本初等函数的图像和性质，渗透化归与转化，数形结合等数学思想，不同的解法区分考查学生的分析问题、解决问题的能力. 在专题复习的过程中，教师要精心选取典型且具有代表性的题目进行分析，尤其是一题多解，和多题归一的训练，注重基础知识和基本技能的落实，教学中应使学生掌握基本初等函数的图像及性质，掌握不等式的性质. 另外本题考查的函数 $y=\frac{\ln x}{x}$ 在人教B版选择性必修第三册89页练习A组3题（3），真正的数学考试一般不会只考一个知识点，所以在复习时要以新教材上的题目为载体进行适当的变式和引申，这样才能使学生达到触类旁通，举一反三的目的，起到事半功倍的复习效果。

参考文献

[1]李大庆.人教版新教材(高中数学)中习题设计的新特点分析及教法建议[J].中国校外教育，2013（05）:50.