

从合情推理走向深度思考

蔡春英

江西省赣州市赣县区茅店中心小学

摘要：人教版四上《交换律》中所涉及的加（乘）法的交换律，学生在初学加法和乘法知识时就已接触，四年级的孩子已有充分的认知经验和学习基础。本文从学生已有学习经验出发，引导其经历“合情推理——举例验证——分析数据——发现规律——建立模型”的学习过程。在这个学习过程中引导学生利用已有学习经验，思考梯度性问题；利用学生的生成，思考价值性问题；利用有价值的讨论，思考延伸性问题；利用研究性练习，思考提升性问题，从而逐步培养学生合情推理能力。

关键词：加法交换律乘法交换律合情推理深度思考

【DOI】10.12252/j.issn.2096-6288.2023.02.122

引言

在一次教学研讨活动中，笔者执教了人教版小学数学四上“交换律”一课。教材第一课时安排学习加法交换律和加法结合律，第二课时学习乘法交换律与乘法结合律。由于四年级孩子在一年级学习加法计算时就已接触到加法的交换性，如： $4+1=5$ ； $1+4=5$ 。在学习加法验算时，也掌握了交换两个加数的位置进行验算的方法。同样，乘法的可交换性，孩子们在二年级《乘法的初步认识》中已学习，如： $2\times 3=6$ ， $3\times 2=6$ 。孩子们在进行乘法验算已经掌握了交换两个因数的位置进行验算的方法。另外，乘法是加法的简便运算，加法交换律和乘法交换律之间又有着密切的联系。因此，笔者将加法交换律和乘法交换律两个内容合并成《交换律》进行有效地教学。

在教学中，笔者尝试引导学生经历“合理猜想、举例验证、分析数据、发现规律、构建模型”的学习过程中。引导学生根据已有学习经验，思考梯度性问题；利用学生课堂生成的问题，思考价值性问题；利用有价值的讨论，思考延伸性问题；利用研究性练习，思考提升性问题。

《数学课程标准》（2022版）指出：教师在教学过程中，应该设计适当的学习活动，引导学生通过观察、尝试、估算、归纳、类比、图画等活动发现一些规律，猜测某些结论，发展合情推理能力。^[1]

波利亚认为：“说得直截了当一点，合情推理就是猜想。”^[2]

合情推理离不开猜想，合情推理的过程其实就是一种理性的学习和思考过程，是一种有理有据地猜想、验证、发现、归纳的过程。小学四年级孩子们的理解能力和表达能力都在进一步的发展中，需要为孩子们积极创造条件，鼓励学生大胆猜想，通过举例验证的方法，逐步引导深入思考，形成理性思考问题的能力。

一、利用已有学习经验，思考梯度性问题

四年级的孩子对加法的可交换性已经有了一定的认知基础和学习经验。利用这一学习经验，引导学生在具体的生活情境中，收集有价值的数学信息，进行猜想。引导孩子们在观察、比较、分析中，逐步提高问题的思考难度。在这个合情推理的过程中，一步一个脚印地去解决教学中逐步呈现的梯度问题，使得孩子们的学习经验能够在已有学习经验的基础上得到提升，思考问题逐步趋于合理性。

本环节让孩子们通过用不同的方法解决问题，发现算式 $25+23$ 与 $23+25$ 中间可以用等号连接，组成新的算式： $25+23=23+25$ ，左边部分和右边部分具有“两个数相加，交换两个加数的位置，和不变”的特征。孩子们在初步观察、发现加法交换律这一数学特征的基础上，引导其猜想“是不是所有的这些算式，都具有交换两个加数的位置，和不变。”的规律。

孩子们通过举例验证猜想是合理的，从而在自己的大脑里形成加法交换律这一数学模型。接着让他们观察黑板上学生举的例子，思考：能不能用一个算式表示所有的这些算式？孩子们分别用图形、字母和文字，表示出了加法交换律这一规律，并说明图形、字母或文字可以表示任何数，抽象概括加法交换律的字母表现形式。在这个合情推理的过程中，孩子们思维经历了从形象到抽象的锻炼过程，他们思考问题的难度在一级一级地递增，加法交换律这一数学模型也在孩子们不断地探究与思考中建立起来，

二、利用学生的生成，思考价值性问题

孩子们根据自己已学的数学知识，对一些数学现象进行合理地猜想。孩子们的猜想，有些猜想是非常有价值的，有些是学生需要解决的重点问题，有些是学生需要解决的难点问题，也有些是他们在今后学习中可能要学习的知识。引导学生思考这些有价值的猜想，能够促

进学生的合作交流、探索有效的学习方法，拓宽学生的思维，使得学生的思考更有深度和广度。

片断二：

师：既然有加法交换律，请你们猜一猜，还可能有哪些交换律呢？

生：减法交换律、乘法交换律、除法交换律。

课件出示学生的猜测：

1. 减法交换律：两个数相减，交换减数和被减数的位置，差不变。

2. 乘法交换律：两个数相乘，交换两个因数的位置，积不变。

3. 除法交换律：两个数相除，交换除数和被除数的位置，商不变。

学生小组合作，选择其中一个猜想，举例验证是否成立。

汇报：

生：因为 $9 \times 6 = 6 \times 9$ 。交换了9和6的位置，左边等于54，右边也等于54，两边的积都相等，所以乘法交换律成立。

生： $20 \times 30 = 30 \times 20$ ，交换两个因数的位置，左右两边的积都是600。

生： $500 \times 7 = 7 \times 500$ ，7与500相乘，交换7和500的位置，积还是3500。

师：有没有交换两个因数的位置，积变了的例子？

生：没有。

师：孩子们，你们通过举例验证的方法，证明了大家的猜想“乘法交换律”是成立的。这个规律可以用字母表示吗，试试看？

生： $a \times b = b \times a$

师：什么是乘法交换律呢？组内互相说一说。

汇报：两个数相乘，交换两个因数的位置，积不变。

当孩子们建构出加法交换律这个数学模型后，让他们猜一猜，还可能有哪些交换律。孩子们猜测可能会有：减法交换律；乘法交换律；除法交换律。很显然，孩子们根据自己的学生经验，提出这三个猜想是非常有研究和探索价值的。孩子们通过小组合作，举例验证，得出结论：所举的例子都能够证明乘法交换律是成立的，自主攻克了本节课的教学重点和难点知识。在这个猜测、举例验证、获得结论的过程中，孩子们积极地与他人合作，掌握举例验证的方法，体验解决自己提出问题的快乐感与成就感。

三、利用有价值的讨论，思考延伸性问题

孩子们在猜测验证的过程中，对某个或者某些数学问题进行一些有价值的讨论。教师可以抓住孩子们在讨

论中呈现的有价值的数学问题或者有难度的数学问题，继续组织学生探索，将问题思考的角度放的更长远些，也就是思考一些延伸性问题。这种讨论的结果可能有成功，也可能有失败。无论成功还是失败，只要是有价值的，有意义的，孩子们合情推理能力都能在这种有价值的讨论中得到发展。

片断三：

师：减法交换律和除法交换律成立吗？

生：因为 $10 - 5 = 5$ ，而 $5 - 10$ 减不动，所以我们认为“减法交换律”不成立。

师：也就是说 $10 - 5 \neq 5 - 10$ 。

生： $13 - 3 = 5$ ， $3 - 13 = -10$ ，交换了被减数和减数的位置后，差不同了。

生： $8 - 3 \neq 3 - 8$

师：有交换被减数和减数的位置，差不变的例子吗？

生： $18 - 18 = 18 - 18$ ，交换了减数18和被减数18的位置，差还是0，不变。

师：既然有成立的算式，那么，我们猜想的减法交换律到底成不成立呢？

生：成立。因为 $18 - 18 = 18 - 18$ 符合要求。

生：不成立，只有被减数和减数相同时算式的左边才等于右边，都等于零。

生：要举的每个例子都能成立。

师：这只是一个特例，刚才我们验证乘法交换律的方法，所举的例子都必须符合猜想的要求，乘法分配律才能成立。所以，通常我们将符合要求的例子叫做正例，不符合要求的例子叫做反例。只要有一个例子不符合要求，也就是有一个反例，我们猜想的减法交换律就不能成立。

师：除法交换律成立吗？

生：我们举了一个反例 $10 \div 2 \neq 2 \div 10$ ，证明“除法交换律”是不成立，

师：同学们，请你们想一想：为什么加法有交换律，乘法有交换律，而没有减法交换律或除法交换律呢？

生：10是被除数，2是除数，交换位置后，2就成了被除数，10变成除数了， $2 \div 10$ ，除不通。

生： $9 - 4 = 54 - 9$ ，根本减不动，减数和被减数是不一样的。

生：5加3等于8，3加5也等于8，它们交换位置，结果是一样的。

生：6乘7等于42，7乘6等于42，因数6和7可以交换位置。

生：加数和加数能交换位置，因数和因数能交换位

置。

生：被除数和除数不能交换位置，被减数和减数也不能交换位置。

师：同学们很会思考，在加法算式里，加数和加数是一样的，两个加数是同一性质的。

生：我乘法是两个因数交换位置，乘法中的两个因数都是因数，性质是相同的。

生：在做减法计算时，被减数和减数，不能交换位置，它们的性质不同。做除法计算时，被除数和除数的性质不同，不能交换位置。

孩子们在探究减法交换律是否成立时，他们举了两个反例“ $8-3\neq 3-8$ ”“ $10-5\neq 5-10$ ”，一个正例“ $18-18=18-18$ ”证明减法交换律是不成立的。笔者则引导他们继续讨论，最后孩子们发现，只要举一个反例 $8-3\neq 3-8$ 就能够证明减法交换律不能成立。正因为孩子们经历了有价值的讨论，有了这样一种深层次的思考经验，所以验证除法交换律是否成立时，孩子们只举了一个反例 $10\div 2\neq 2\div 10$ 就证明其不成立。

接着笔者引导孩子们延伸思考：为什么有加法、乘法交换律，没有减法和除法交换律？通过大家举例验证，孩子们明白了性质相同的加数可以交换位置，性质相同的因数也可以交换位置，但是性质不同的减数和被减数是不能交换位置的，同样被除数和除数的性质不同，也不能交换位置。这样延伸，能为后面探究练习中的连减连除题，设置悬念，引发思考。

四、利用研究性练习，思考提升性问题

研究性练习是对新知学习的延伸，设计研究性练习既要考虑练习内容与本节课知识的联系，又要延伸到今后学习中会遇到的知识。在解决研究性练习的过程中，我们可以继续鼓励孩子们探究，猜想，思考具有提升性的数学问题，尝试通过举例验证的方法，归纳概括出正确的结论，提高学生运用所学知识解决实际问题的能力，发展学生的合情推理能力。

片断四：

在下面的○里填“>”、“<”或“=”。

$$142-58-42 \bigcirc 142-(58+42) \quad 72\div 3\div 8 \bigcirc 24\div (8\times 3)$$

(1) 独立思考和计算。

(2) 思考：你发现了什么，根据发现猜一猜规律。

(3) 小组合作举例证明。

分组汇报：

第一组：

我们组猜想：三个数连减，交换减数的位置，差不

变。

生： $8-1-2=58-2-1=5$ ； $8-1-2=8-2-1$

生： $12-2-3=12-3-2$

生：我们发现减数的位置是可以交换的，它们都是减数。

生：我们组的猜想是成立的。

第三组：

生：我们组发现除数和除数之间是可以交换位置的，根据这个发现，我们猜想：如果三个数连除，交换除数的位置，商是不变的。

生：我们组举了两个例子：

$$\textcircled{1} 24\div 6\div 2=24\div 2\div 6;$$

$$\textcircled{2} 48\div 6\div 8=48\div 8\div 6$$

这两个例子，都能证明我们的猜想是对的。

师：试着用字母概括这两个规律。

生： $a-b-c=a-c-b$ ； $a\div b\div c=a\div c\div b$

思考：(1) 如果有四个或者四个以上的数连减，减数的位置可以交换吗？

(2) 如果是四个数或更多的数连除，除数的位置可以怎么变化？

(3) 你发现了什么规律？

生：四个数连减，减数的位置可以交换。

……

在解决研究性练习的过程中，孩子们先完成填空题 $142-58-42 \bigcirc 142-42-58$ ； $72\div 3\div 8 \bigcirc 24\div 8\div 3$ 。在解决问题的过程中，孩子们通过比较大小，发现规律，根据已有学习经验，进行猜想：三个数相减，交换减数的位置，差不变。三个数连除，交换除数的位置，商不变。

学生通过举例验证的方法得出：被减数连续减两个数，两个减数可以交换位置。被除数连续除以两个数，两个除数的性质一样，可以交换位置。有了这样的学习经验，学生一下子就发现多个数连减，多个连除，减数的位置可以交换，除数的位置可以交换的规律。这个

规律的获得，对孩子们今后学习运用连减、连除的知识解决数学问题有很大的启发性。

总之，在《交换律》的学习中，引导孩子们在已有学习经验的基础上有理有据地猜想，能够培养学生的合情推理能力，拓宽学生的思路，使得他们的思考有深度、有内涵。笔者也将不断探索更好的方法，逐步培养学生合情推理能力。

参考文献

[1] 《义务教育数学课程标准》(2022版) 中华人民共和国教育部制定，北京师范大学出版社

[2] 《培养学生合情推理能力的策略》谢飞祥