混合式教学在概率论与数理统计中的应用
——以全概率公式为例

何启茹
广东东软学院 基础教学院

摘　要：《概率论与数理统计》是一门研究随机现象及其统计规律性的学科。通过本课程的学习，学生的数学思维、逻辑推理能力、问题分析能力有一定程度上的提升。但是，在概率论与数理统计课程的教学中，大部分教学活动的展开仍采用以教师讲授为主的传统教学模式，在此教学模式下，由于本课程的难度大、学时少、要求高的特性导致学生的学习缺乏主动性，学习效率不高。因此，本文以“全概率公式”为例，探讨了更有利于学生学习的“混合式教学模式”，对教学内容重构、教学资源重组、设计教学活动，发挥线上教学与线下教学相结合的优势，以提升学生的课堂参与度以及学习效率。

关键词：概率论与数理统计；混合式教学；全概率公式
【DOI】10.12252/j.issn.2096-6288.2023.05.146

引言

《概率论与数理统计》是一门研究随机现象及其统计规律性的一级学科。由于本门课程的理论性强、应用性广、实践性强、综合性突出，因此在众多高校中，概率论与数理统计课程作为一门公共基础课开设，通过本课程的学习既能培养学生的数学思维和逻辑思维，又能对学生分析问题、解决问题的能力提高，以及对后续专业课程的学习奠定基础。

当前概率论与数理统计的教学活动大多仍是采用教师讲、学生听的传统教学模式，极具填鸭式的教学特性[3]。在此教学模式下，由于教学中大多把教学重点放在对基本数学概念的讲解上，学生只能将数学课上的知识点通过死记硬背的方式进行被动的接收。由于大部分学生未能真正理解掌握知识，更难以将所学知识应用到实际问题中。因此，为了激发学生的学习兴趣，让学生的学习态度化被动为主动，在学习过程中进行学以致用，本文基于混合式教学模式在概率论与数理统计的教学过程中，对教学活动的开展进行重新整合设计。

一、混合式教学简介

混合式教学，是一种“线上”与“线下”相结合的教学模式，兼具在线教学和传统教学的优势。在两种教学形式的结合的情形下，可以大大提高学生的主观能动性以及学习效率。

概率论与数理统计课针对大二学生开设，这部分学生或多或少地已经适应了大学的学习节奏，自主预习、自主复习能力得到进一步地提升，因此概率论与数理统计的教学中应用混合式教学模式是可行的[5]。为了充分体现概率论与数理统计的数学思想，训练学生的数学思维，提升学生分析问题、解决问题的能力。我们在课程设计上采用线上学习和线下教学相结合的形式；我们在课程内容上基于全概率公式这一知识点进行教学内容重构、教学资源重组；我们在具体的教学行为上主要采取学生主体参与、教师主导活动的形式。

二、教学重难点

（一）教学重点

掌握并理解完备事件组的基本概念、能正确理解乘法公式到全概率公示的推导过程、对全概率公式进行应用并能求解实际问题。

（二）教学难点

全概率公式使用的前提、全概率公式的理解与应用。

三、教学设计

（一）课前准备

教师需要提前在泛雅学习通平台上发布预习导学的题目，学生在学习通上完成相应的题目，教师可根据预习情况适当调整讲课内容。另外，针对比较难理解的知识点 ，教师录制了微课视频 ，便于更好地引导学生进行预习[6]。

首先需要回顾与全概率公式这节内容相关的知识。由于全概率公式与上一节课学习过的条件概率以及乘法定理具有紧密的联系。因此在学习本节课之前需要让学生复习条件概率的相关知识点。这部分内容在学习通进行布置，课前通过学习通提醒学生及时完成相关学习任务。在学习通上布置预习导学的题目如下：

题目1：请将下列的条件概率公式以及乘法公式补充完整：

$P(A|B)=$____________；$P(AB)=$____________

题目2：请用乘法公式解决如下问题：盒子中有十

个球，其中六个红球，四个白球，连续两次从盒子中不放回的任取一个球，问第二次才取到的白球的概率为多少？

题目3：判定下列对于完备事件组的描述是否正确：

若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中，任意i，j∈[1,2,3,……，n]且i≠j，则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为完备事件组。（　）

若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中，$A_1+A_2+\cdots+A_n=\Omega$，其中Ω为样本空间，则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为完备事件组。（　）

教师上课之前通过学习通自动评分系统检查学生的预习情况，根据完成情况进行记录，将分数计入平时成绩中。教师根据学生的预习进度、学习通上预习导学题目的完成情况以及学习平台讨论区的留言，适当调整课上的教学设计，围绕学生的问题疑惑进行展开，以提高课堂教学效率。

（二）课堂讲解

1.回顾旧知识

由于全概率公式的基本概念与上节课中学习到的条件概率公式及乘法定理联系紧密，因此在学习新内容前，先将上节课的内容进行回顾。

条件概率的定义如下[1]：

设A,B是两个事件，且 $P(A)>0$，称 $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$ 为事件A发生的条件下事件B发生的条件概率。

乘法定理如下：

由条件概率公式得到：

$P(AB)=P(A)P(B|A),P(A)>0$，注意到AB=BA，由于A,B的对称性可得到类似的公式：$P(AB)=P(B)P(A|B),P(B)>0$，这两个公式称为概率的乘法公式。

根据学生在学习通上预习导学题目中上一节练习题的完成情况，强调易错点，特别注意培养学生用大写英文字母A、B、C对随机事件命名的习惯，并且将实际问题具体分析后能确切地代入条件概率公式或者乘法公式中。

2.引入新知识

引例：箱子里有五个乒乓球，其中有三个黑的，两个白的，无放回地取两次，每次取一个，问第二次取得黑球的概率为多少？

这道题目作为课堂小练习即时发布在学习通上，学生们可利用已学的高中概率知识以及上节课的乘法公式结合起来进行解答，可自行思考也可相互讨论。五分钟思考时间后，根据学习通上的完成情况，可选出几种思路具体分析。首先引导学生思考第二次取得黑球的事件可具体分几种情况讨论，很显然具有两种情况。情况一：第一次取得黑球且第二次也取得黑球；情况二：第一次取得白球但第二次取得黑球。

我们不妨设“第一次取得黑球”为事件A，“第二次取得黑球”为事件B.则情况一发生的概率可用乘法公式，得：$P(A)P(B|A)=\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}=\frac{3}{10}$，情况二发生的概率同理：$P(\bar{A})P(B|\bar{A})=\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{10}$。综上，

$$P(B)=P(A)P(B|A)+P(\bar{A})P(B|\bar{A})=\frac{3}{10}+\frac{3}{10}=\frac{3}{5}.$$

我们发现上面的解题思路的本质上是将一个包含多种可能性的复杂事件划分成了两个或者多个互不相容的简单事件，然后对每个简单事件应用乘法公式与加法公式，最终求出了这个复杂事件的概率。那么请同学们思考，此方法能否推广到更一般情形呢？

3.全概率公式

为介绍全概率公式，首先引入完备事件组的概念[1]。

若两两互不相容的事件组 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，满足 $A_1+A_2+\cdots+A_n=\Omega$，则称事件组 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为完备事件组，有时也称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为样本空间Ω的一个划分。

由于 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是样本空间Ω中的一个完备事件组，我们可以通过文氏图，图1直观地看出它们的关系。

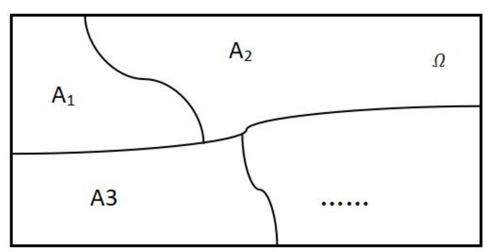

图1

现在我们假设B是Ω中的任一事件，则 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 与B的关系如下图2所示，

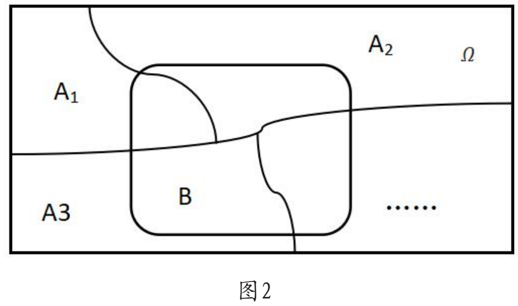

图2

则$B = A_1B + A_2B + \cdots + A_nB$，由加法公式，

$$P(B) = P(A_1B + A_2B + \cdots + A_nB) = P(A_1B) + P(A_2B) + \cdots + P(A_nB),$$

再由乘法定理，

$$P(B)=P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + \cdots + P(A_n)P(B|A_n).$$

因此，将上述情况归纳总结出一般情形，便可得到如下定理：

设随机试验的样本空间为Ω，事件组$A_1, A_2, \cdots, A_n$是一个完备事件组，且$P(A_i) > 0, i = 1,2,3,\cdots,n$那么对任一事件B有$P(B)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i)$.

这便称其为全概率公式。

有了这些理论基础的铺垫后，我们引导学生完成学习通上的练习，将新学习的知识立即用于实际问题的解答中，注意强调全概率公式的关键在于找到完备事件组。

学习通题目： 有一批同型号的电子产品，甲工厂的产量占其中的30%，乙工厂的产量占其中的50%，丙工厂的产量占其中的20%，并且三个工厂的次品率分别为2%，1%，1%，请问在这批同型号的电子产品中任取一件产品是次品的概率是多少[2]？

分析：设随机事件B为“任取一件是次品”，A_1为“产品由甲工厂生产”，A_2为“产品由乙工厂生产”，A_3为“产品由丙工厂生产”，容易得知A_1，A_2，A_3确为一完备事件组。

根据题目已知信息，将所有概率进行整合，由“甲工厂的产量占其中的30%”则$P(A_1) = 0.3$；

由“乙工厂的产量占其中的50%”，则$P(A_2) = 0.5$；

由“丙工厂的产量占其中的20%”，则$P(A_3) = 0.2$；

由“三个工厂的次品率分别为2%，1%，1%”，则$P(B|A_1) = 0.02, P(B|A_2) = 0.01, P(B|A_3) = 0.01$,

根据分析可知，取得次品有三种可能性：一、抽到甲工厂的产品且为产品次品；二、抽到乙工厂的产品且产品为次品；三、抽到丙工厂的产品且产品为次品；

则由全概率公式，

$$P(B)=P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + P(A_3)P(B|A_3)$$
$$=0.3\times 0.02 + 0.5\times 0.01+0.2\times 0.01=0.013$$

因此从这批产品中任取一件是次品的概率是1.3%

结语

在本教学过程中，对全概率公式的教学活动开展应用混合式教学模式。课前预习时通过线上学习平台完成预习导学题目并且观看微课视频，课上教学时部分题目讨论以及完成线上小练习，到课后完成本节课相关知识点的小测验，混合式教学贯穿整个教学过程中。在此教学模式下，能更好地引导学生养成课前预习的学习习惯、提升学生的自主学习能力，能更好地使教师了解学生课前预习情况、掌握学生阶段性的学习情况。由于课上教学引导学生自主完成了练习，教师对学生的学习效果进行及时反馈，当学生通过练习受到鼓励时，能够对新知识有更深入的理解，应用概率论的知识解答实际问题充满兴趣，将数学知识、数学思想应用到实际生活中更为灵活。

线上线下混合式教学模式提高了教学效率，在整个教学过程中始终保持以学生为中心，使得教学活动的开展更加顺利，能够促进学生的课堂参与度，提升概率论与数理统计课堂的深度，进而培养学生发现问题、分析问题和应用数学思想解决问题的能力。

参考文献

[1]魏宗舒.概率论与数理统计[M].北京：高等教育出版社，2009：65-66

[2]严维军.应用概率统计[M].东软电子出版社，2022：34-36

[3]顾荣.“五星教学模式”在概率论与数理统计课程中的应用——以“全概率公式”教学为例[J].中国多媒体与网络教学学报(中旬刊),2022(05):97-100.

[4]牛潇萌,李浩然.《概率论》混合式教学设计与实践[J].赤峰学院学报(自然科学版)，2022，38(11)：65-67.

[5]殷烁,于梅菊,丛玉华等.基于翻转课堂的概率论与数理统计课程教学改革探索[J].通化师范学院学报，2019，40(12)：115-118.

[6]阮海洪.基于微课的概率论与数理统计教学设计研究[J].科学咨询(科技·管理),2021(08):257-258.