# 错题归因与变式，让思维走向纵深
## ——以圆锥曲线中弦长与面积问题为例

杨瑛
广州奥林匹克中学

**摘　要：**圆锥曲线中的面积问题综合性强，其中对三角形面积和四边形面积考察最为普遍，但由于条件多、图形复杂、运算量大，对思维能力和计算能力要求较高，学生容易出错。学生通过对错题追根溯源、重练与变式训练，进而养成多方向、多角度分析问题的习惯，提升思维的灵活性，适应新高考命题的新、活、广。

**关键词：**错题；变式；思维发展
【DOI】10.12252/j.issn.2096-6288.2023.05.020

### 一、问题提出

木桶原理告诉我们：一个木桶所装的最大水量取决于最短的那块木板。应用在数学学习上即为一个学生的学科能力取决于最弱的知识点。因此，短板就是学生的错题。错题解决得越多，遗留的问题也就越少，对存在问题足以突破，便能更好地掌握与运用知识。

学生对于错题若是仅停留在错题订正不做归因，教师对于学生出现的错误归结于计算能力低、粗心等，只是讲解错题要求学生订正错题，忽视错题对学生能力提升和思维发展的作用[1]，不利于学生知识结构的完善，下次学生还可能在同类型题中犯错。

美国著名的教育心理学家（E.L.Thorndike）利用饿猫逃出“问题箱”的实验结果得出学习的实质。他认为：学习是一个不断尝试和错误的过程，通过试误来建立正确的联结[2]。这为我们的高中数学教学提供了一种重要的思路：做完练习后，让学生对错题进行归因，并通过“重复”练习来强化正确的联接，这样的教学方式可帮助学生理解知识，从而减少错误的发生，培养学生的反思、修正的习惯，提升学生思维的广阔性与创新性[3]。

本文以学生考试中的一道关于圆锥曲线中弦长和面积题型错题为引，浅谈如何对错题进行归因与变式，帮助学生提高对此类题型的解题能力，建立正确的数

学思维习惯，从而更好地应对更复杂的问题。

### 二、精选错题，辨析诊断

【错题】已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的焦点坐标为$F_1(-1,0)$，$F_2(1,0)$，点A（1，$\frac{\sqrt{2}}{2}$）为椭圆上一点.

（1）求椭圆C的标准方程；

（2）经过点$F_1$且倾斜角为45°的直线l与椭圆C相交于M、N两点，O为坐标原点，求△OMN的面积.

本题是广州市天河区高二期末考试17题，侧重考察了直线与椭圆相交的弦长问题，这类题目是最基本的综合性题型，具有教学功能，通过解题使学生掌握求弦长、三角形面积的基础知识，形成必要的技能技巧。

首先在课堂上呈现学生的答题情况，提供机会有意识地引导学生自行查找错误、小组交流错误、纠正错误，分析错误产生原因，形成数学探究的氛围，让学生经历数学探究的过程，激发学生的好奇心和兴趣。有助于学生思维能力的发展。课堂上找错纠错的过程中刺激了学生的求知欲，在轻松和谐的氛围中认识到本题常见错误为求解弦长时计算出错、公式记错，主要由于公式不清、知识缺陷、计算能力较低即基础不实等原因造成，也就确定下阶段的学习任务和目标。

同时教师可通过学生的错误，反思自己的教学。由于课本并没有弦长公式的教学任务，也没有弦长公式。关于弦长的习题只在3.1.2椭圆的几何性质的课后练习中出现，原题及解答如下：

【课本练习题P114】11.经过椭圆$\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$的左焦点$F_1$作倾斜角为60°的直线l，直线l与椭圆相交于A，B两点，求AB的长.

【解析】∵椭圆方程为$\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$，∴焦点分别为$F_1(-1,0)$，$F_2(1,0)$，∵直线AB过左焦点$F_1$倾斜角为60°，∴直线AB的方程为$y=\sqrt{3}(x+1)$，$\begin{cases}\frac{x^2}{2}+y^2=1\\y=\sqrt{3}(x+1)\end{cases}$，消去y得$7x^2+12x+4=0$

设$A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$，可得

$x_1+x_2=-\dfrac{12}{7}$，$x_1x_2=\dfrac{4}{7}$ $\therefore|x_1-x_2|=\sqrt{(-\dfrac{12}{7})^2-4\times\dfrac{4}{7}}=\dfrac{4\sqrt{2}}{7}$

因此，$|AB|=\sqrt{1+3}\cdot|x_1-x_2|=\dfrac{8\sqrt{2}}{7}$.

学生若通过两点的距离公式求解弦长，计算量大，

过程过于繁琐，所以不少教师则马上给出弦长公式 $|AB|=\sqrt{1+k^2}|x_1-x_2|$，要求学生记、套公式，而没有让学生在课堂上体验探究弦长求解、证明弦长公式等数学活动，显然这种灌输式的教学是无效教学，导致部分学生对公式的印象不深、认识不足、使用不当。在明确了学生错误原因后，教师需针对性地调整自己的教学，让学生经历困难，发动组织学生探究新的方法，这样得到知识是学生自我认识的结晶，必然无须死记硬背。只有让学生充分经历知识产生的过程，还原数学结论和数学公式产生的过程，才能充分调动学生思维的创造性，聚焦深度学习。

**三、错题变式，提升思维**

（一）阶梯变式

通过改变或增加或减少题目的条件、改变问题的问法等方式，形成有梯度的变式，使问题一般化，帮助学生对不同的情况进行区分和理解，掌握圆锥曲线中弦长问题的通性通法，提高他们的解题与应变能力。

【变式1】第二问调整为：经过点$F_1$的直线l与椭圆C相交于M、N两点，O为坐标原点，求△OMN的面积的最大值.

由定直线调整为动直线，由求三角形的面积变成三角形面积的最大值问题，增加了解题的灵活度和难度。学生先练师生共评，一找典型错误：已知直线上一点求设直线容易出现以偏概全，忘记分类讨论的错误，设直线为y=k(x+1)则漏考虑斜率不存在时；设直线为x=my-1，则需说明斜率为0时不符合题意；二找更优解法，过x轴上的一点的直线，学生用上述两种不同方法求设直线，比较得到若已知直线上的一点，这点若在x轴上时，可以“反”设直线，或更直观称之为“倒斜率”求设直线，这种方法无须分情况讨论而且计算量更小；三角形OMN的面积用 $S_{\Delta OMN}=\frac{1}{2}|MN|\cdot d$ 或 $S_{\Delta OMN}=\frac{1}{2}|OF_1|\cdot|y_1-y_2|$，比对学生的不同解法，帮助学生学会“理解需要解决的问题，观察已知条件，选择合理、简捷的运算策略”。

解：由题意得直线 l 的斜率不为 0，可以设直线 l 的方程为 x=my-1，M$(x_1,y_1)$，N$(x_2,y_2)$

由$\begin{cases}x=my-1\\ \frac{x^2}{2}+y^2=1\end{cases}$

可得（$m^2+2$）$y^2-2my-1=0$

解：①若直线的斜率不存在时，l 的方程为 x=-1

易得 M（-1，$\frac{\sqrt{2}}{2}$），N（-1，-$\frac{\sqrt{2}}{2}$）

可得$S_{\Delta OMN}=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times1=\frac{\sqrt{2}}{2}$

②若直线 l 的斜率存在时，可设为 k

则 l 的方程为 y=k(x+1)

由$\begin{cases}x=k(x+1)\\ \frac{x^2}{2}+y^2=1\end{cases}$

可得（$2k^2+1$）$x^2+4k^2x+(2k^2-2)=0$

学生通过错因分析，一题多解，方法探究与比较，归纳与总结这一系列的数学活动过程获得了广泛的数学活动经验，发现这类问题所在，发挥了变式题的教育功能，帮助学生更好地理解和掌握相关知识，提高解题的准确性和效率，以此形成对数学知识的理解和有效的学习，进一步提升数学思维，培养创新精神。

（二）图形变式

对图形的形状、大小等非本质因素进行图形变式，将错题中三角形调整成变式2中的平行四边形，让学生对不同的图形进行分析、总结结，掌握圆锥曲线中长度问题和面积问题的本质特征，强化重点。

【变式2】 第二问调整为：设O为坐标原点，过椭圆C的左焦点$F_1$作直线$l$，$l$交椭圆C于M，N两点，（M、N不在x轴上），若$\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}$，求四边形MONE面积S的最小值。

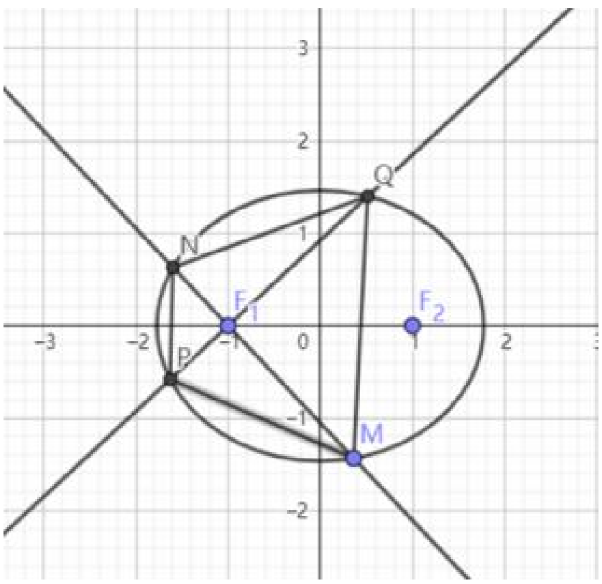
【变式3】直线$l$与椭圆C交于M、N两点（M、N不在x轴上），若$\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}$,且点E恰好在椭圆上，试问：四边形OMEN的面积是否为定值？若是定值，求出此定值；若不是，说明理由.

变式2与3中增加了数学情境，在向量的背景下考察圆锥曲线中四边形面积的求解。学生不会处理$\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}$，教师可鼓励学生跳出思维定势，脱离椭圆背景去分析条件，根据向量加法运算的平行四边形法则，可知四边形OMEN为平行四边形，$S=2S_{\Delta OMN}$，进而转化为三角形的面积问题即变式1来求解。

变式3“减少”了直线的已知条件，通过变式1和变

式3，可完善学生求设直线的知识架构；变式2与3相同条件，点E需在椭圆上，从而可以探寻直线方程中参数的关系，再去根据$S=2S_{\Delta OMN}$，解决四边形面积的问题。

学生的思维提升是一个知识点逐步积累的过程，在初始阶段，学生先掌握圆锥曲线中求解弦长，掌握单个知识点；再改变条件，为动直线与椭圆相交，解决三角形面积问题；继续增设向量背景，改变图形的形状，通过这些变化，学生全面地理解和掌握圆锥曲线图形面积问题，在解决问题的过程中，建构了知识的横向联系，养成了深度思考问题的习惯。

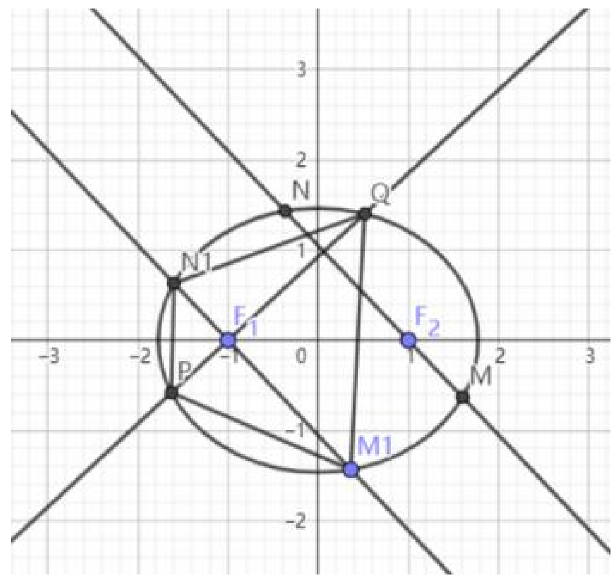



（三）对比变式

知识点是固定的，但出题形式可千变万化，穿着西装的张三和穿着马甲的张三，实则为同一个人。一题多变，帮助学生熟练运用化归与转化、分类讨论、数形结合等数学思想和方法。

【变式4】第二问继续变为：过椭圆C的左焦点F作两条相互垂直的直线$l_1$，$l_2$,其中$l_1$交椭圆C于M，N两点，$l_2$交椭圆C于P，Q两点，求四边形PMQN面积的最小值

【变式5】再变为：过椭圆C的左焦点$F_1$作直线$l_1$，$l_1$交椭圆C于P，Q两点，若过右焦点$F_2$的直线交椭圆C于M、N两点，且$PQ\perp MN$求四边形PMQN面积的最值




变式4和5继续改变四边形的形状，由平行四边形变形为两条对角线互相垂直的四边形即垂美四边形，此类问题还是转化为三角形面积来求解，可推出四边形PMQN面积$S=\frac{1}{2}|PQ||MN|$，让学生在变式中思考,解决四边形面积的解决方法。万变不离其宗，换汤不换药，究其本质还是弦长问题。

变式5考查学生几何认知能力。利用椭圆的对称性，得到弦长$|MN|=|M_1N_1|$，变3和变4就化归为同一个题，张三还是张三。变式4和5可作为课后反馈训练，检测学生对本节课教学内容的掌握情况，及时跟踪学生的学习效果，发挥此类变式题组的评价功能。

**结束语**

总之，学习的过程就是不断犯错的过程，学生的错题是学生学习，教师教学的绝佳资源。新课程标准提出要重视学生学习的过程，面对错题，强化“归因”与“变式”，感悟知识本质，学习才能走向深刻。面对错题，教师需转变观念，正确认识错题的功能，不能一味否定，错题是学生给老师的教学反馈。学生需端正态度，调整心态，做题最大的收获其实就是错题。教学中教师必须摒弃 “灌输式”教学模式，给予学生参与其中的时间与空间，分享与交流的机会，去发现错误并解决错误。师生共同分析错误原因，教师对学生的错题再加工精加工，题目从简单到困难、从单一考察个别知识点到全面考察数学知识和思想方法，也可让学生自己尝试变式，有利于学生洞悉题型与方法，从“被动学”转化为“主动思”[4]，从“解题”变为“解决问题”，课后学生对错题分类整理、定期复习、延伸思考，将前后所学知识有机结合，搭建知识体系，提升思维能力，进一步发展数学素养。

**参考文献**

[1]余不易.改变错题使用策略 提升学生思维能力[J].物理教学探讨,2020,38(03):70-72.

[2]喻平.数学教育心理学[M].上海.上海教育出版社,1996.

[3]戴荣.整合错题资源提升复习效率[J].数学教学通讯,2021,No.772(27):80-81.