概率论与数理统计中“泊松分布”的教学设计

何启茹
广东东软学院 基础教学院

摘　要：概率论与数理统计是在数理统计 的原理及方法的基础上，对于随机事件及其统计规律进行相关研究的一门科学。作为一门公共基础课，其课堂教学具有一定的难度，因此在课堂教学上应注重理论与实际相结合，注重学生应用能力的训练与培养，进一步地提高学生解决实际问题的能力。本文以常见的离散型随机变量中“泊松分布”这一知识点为例进行教学设计，具体包括问题的引入、知识点的回顾与延伸、泊松定理的归纳总结、问题的讲解与分析，使得学生更为深刻地理解“泊松分布”的基本概念、意义及其应用。

关键词：概率论与数理统计；泊松分布；泊松定理；教学设计
【DOI】10.12252/j.issn.2096-6288.2023.06.013

概率论与数理统计是近现代数学基础极其重要的组成部分，也是当今社会快速发展信息计算科学的重要理论工具。其作为一门研究随机现象及其客观规律性的数学基础课，将其思想方法常常用于生产生活的多个领域中，上至航空航天、军工生产下至我们的日常生活[4]。概率论与数理统计也是众多高等院校一门重要的公共基础课。在日常教学实践中，教师应当以概率论与数理统计的知识为载体，将其蕴含的数学思想融入我们的教学活动中，对教学目标、教学重难点、教学方法、教学过程等进行整合设计。特别地，在概率论与数理统计的发展史上，“泊松分布”占有一定地位。泊松分布在概率论中起到了承上启下的作用，它作为常见的离散型随机变量，与二项分布产生重要联系，更为后续的连续型随机变量中的正态分布作好铺垫。为此，本文对“泊松分布”进行精心地教学设计，力求为教师授课以及学生学习提供一种新的思路和引导。

一、教学目标

理解并掌握泊松分布发生的背景，明确其应用场景——常常与计数过程产生联系。掌握符合泊松分布的随机现象的求解方法，进一步明确泊松分布里随机变量面对不同的取值时其对应的概率计算的技巧。特别地，深刻理解泊松定理的应用，明确泊松分布与二项分布之间的联系与发展。培养学生以概率论中学到的数学思想去分析实际问题的能力。

二、学情分析

民办高校的学生数学基础普遍较弱，对于概率的理解和应用仍停留在中学阶段，在随机事件与概率、离散型随机变量的分布律的学习后，虽掌握了一定的概率计算技巧，具备一定的归纳总结能力、抽象思维能力。但仍存在不足：对于知识点之间的联系、逻辑框架的建立有所缺乏，特别是针对于实际背景下的具体问题求解，大部分同学无从下手，概率论当中数学思维的运用以及对于实际问题进行数学建模能力有待提高。

三、教学重点及难点

（一）教学重点

掌握并理解泊松分布、能正确引入泊松分布的随机变量、对泊松定理进行应用并能求解实际问题。

（二）教学难点

泊松分布的理解及判别技巧、泊松定理的理解与应用。

四、教学过程设计

（一）引入实际问题

为激发学生的求知欲，给出生活中常见的一个实际问题：假设现有一本500页的待校正的书籍，共发现了1000个错别字，并且每个错别字出现每一页上的可能性是一致的，请同学们思考如下问题：我们能否估计出给定的某一页上至少出现3个错别字的概率[2]？

为了便于后续的计算，我们依照概率论中的严格描述，用随机变量X表示该指定页上出现的错别字数量。针对于现实生活中复杂的随机现象的相关概率问题进行深入研究时，由已知的每个错别字是等可能地出现在每一页上，便可假设事件A为在该页上出现错别字的随机事件，那么求“给定的某一页上至少出现3个错别字的概率”就转化为求“随机事件A发生k次的概率”。

那么求指定的一页上至少出现3个错别字的随机事件即可转化为求 $P\{X \geq 3\}$。

（二） 回顾二项分布

为了接下来建立出与此随机现象相匹配的数学模型，首先需引导学生将二项分布的相关知识进行回顾。在概率论中二项分布具体可描述为，在n重伯努利试验中，随机事件A发生的概率为p，那么其发生k次的概率即分布律可表示如下：

$$P\{X=k\}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}, k=0,1,2,\cdots,n$$

就称其服从参数为n，p的二项分布，记做 $X \sim B(n,p)$ 。对于服从二项分布的随机变量，我们可以通过Matlab软件绘图观察二项分布在不同的参数取

值下，其分布律随参数的变化情况，如图2所示。取$n=100$，$p=0.05$时，随着试验次数的增加，其概率分布的结果是逐渐增大再逐渐减小。保持每次试验的概率p不变时，不断增加试验次数，会发现其分布律的最大值是逐渐减小的并且向右移动。

（三） 建立数学概率模型

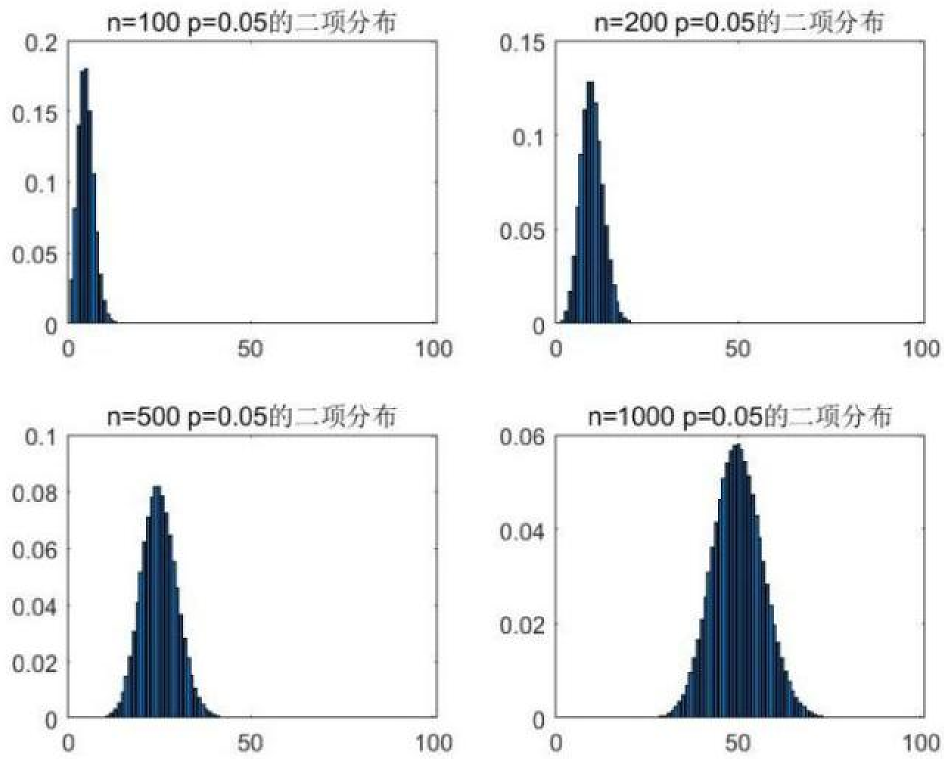

图1 二项分布在不同参数下的分布情况

有了二项分布的理论基础后，在已知条件为每个错别字是等可能地出现在500页书上，要求的“给定的某一页上至少出现3个错别字的概率”。很容易发现其与二项分布能够产生联系，在二项分布中，常常研究的是伯努利试验次数不多的情形下，随机事件A发生k次的概率，但这个问题里研究对象试验次数过多，直接使用二项概率公式不容易得出最终结果，所以我们需要利用新的概型来求解该问题。

（四）定义泊松分布

对于泊松分布，可以定义为：若随机变量X的分布律满足：

$$P\{X=k\}=\frac{\lambda^{k}}{k!}e^{-\lambda},\lambda>0$$

则称随机变量服从泊松分布，记做 $X\sim P(\lambda)$。关于泊松分布在现实生活中的应用场景，常常出现在各式各样的计数问题中，例如单位时间段内车站的候车人数、手机的通话次数、以及生产线的故障次数等[3]。为了直观看出其分布特征，我们仍使用数学软件Matlab绘制柱状图进一步地观察，不同参数λ对应的不同泊松分布情况如图3所示。我们很容易发现泊松分布的分布律与二项分布的分布律的变化趋势一致，那么二项分布和泊松分布之间到底有何联系？

（五）泊松定理

关于二项分布与泊松分布之间的关系，即泊松定理，具体描述如下：假设在n重伯努利实验中，随着试验次数n无限增大，而随机事件A发生的概率p无限缩小，且当$n\to\infty$时有$np\to\lambda$，则

$$\lim_{n\to\infty}C_n^k p^k(1-p)^{n-k}=\frac{\lambda^{k}}{k!}e^{-\lambda}$$

为了更加深入理解二项分布与泊松分布之间的关系式，进行如下的简单推导：

$$\lim_{n\to\infty}C_n^k p^k(1-p)^{(n-k)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}\frac{\lambda^k}{n^k}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\lambda^k}{k!}\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{n^k}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\lambda^k}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\lambda^k}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$$

$$=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

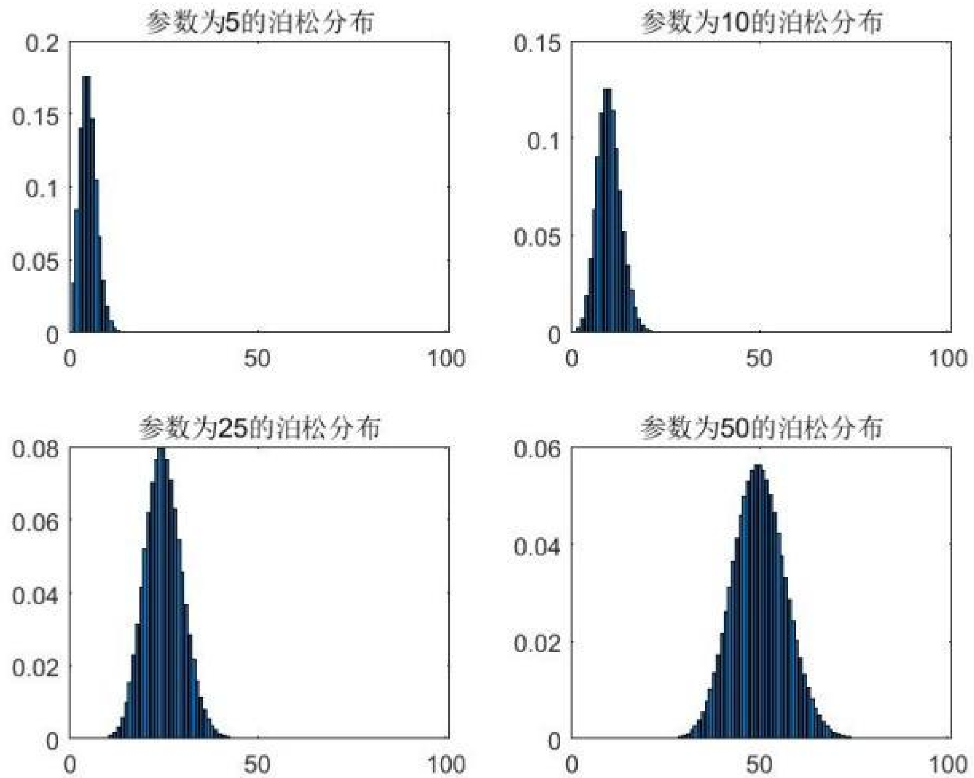

图2 泊松分布在不同参数下的分布情况

得证

由于泊松定理是在$np \to \lambda$条件下得到的，所以在实际计算中，当试验次数n很大，发生概率p很小，且$np=\lambda$大小适中时，可以直接使用下列近似公式：

$$C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

因此，我们也可以说泊松分布是二项分布的极限形式[2]。

（六） 问题解决

再次回到错别字的计数问题，具体需要求$P\{X \geq 3\}$。可根据题意，由于出现错别字是个小概率事件，并且相互独立，则指定页上出现错别字的数量即随机变量X服从参数分别为1000、500的二项分布，即X~B(1000, 1/500)，随机变量X也服从参数$\lambda=np=2$的泊松分布，即X~P(2)。从而

$$P\{X \geq 3\}=1-P\{X \leq 2\}$$

$$=1-P\{X=2\}-P\{X=1\}-P\{X=0\}$$

$$=1-\sum_{k=0}^{2} \frac{2^k}{k!} e^{-2}$$

$$\approx 0.323324$$

结语

本教学设计遵循“问题提出—建立数学模型—分析实际问题—解决问题”的认知过程，并且注重引导学生在思考实际问题、构建数学模型的教学活动中，多方面地理解并掌握泊松分布的概念及泊松定理的应用。泊松分布的教学设计采用启发式教学方式，从分析随机现象的概率问题出发，引导领学生在二项分布的基础上，通过极限化的思想，推导出泊松分布与二项分布间的关系，再给出泊松定理及其证明，使学生更易于理解；此外，我们还借助了数学软件Matlab将随机试验可视化，直观理解基本概念，以问题为载体，在解决实际问题的过程中，对概率论的知识进行及时的回顾与应用，培养学生的自主学习能力、数学建模能力和概率论与数理统计的知识解决问题的能力。

参考文献

[1]魏宗舒.概率论与数理统计[M].北京：高等教育出版社，2009：65-66

[2]严维军.应用概率统计[M].东软电子出版社，2022：34-36

[3]都琳,周丙常,师义民等.基于问题驱动的泊松分布教学设计[J].高等数学研究,2018,21(01):57-60+64.

[4]王燕飞,薛冬梅.概率论与数理统计中“二项分布”的教学设计[J].吉林化工学院学报,2022,39(02):13-17+21.

[5]贾爱娟,崔红新,毛悦悦.概率论与数理统计中“独立性”的教学探讨[J].中医药管理杂志,2021,29(14):41-42.